Vaellusretkiä matematiikkaan / viitteet

MacTutor *The MacTutor History of Mathematics archive*, matematiikan historian sivusto, http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/.

MatTa Teknillisen korkeakoulun *MatTa*-projektin sivusto, http://matta.hut.fi/matta/.

Iso-M *Simo K. Kivelä, M niinkuin matematiikka*, lukiotason matematiikan tietosanakirja, MFKA-Kustannus 2000, tai http://matta.hut.fi/matta/isom/isom.pdf.

1 Kreikkalaisten suuri idea

[1]*Pythagoras Samoslainen* on vanhimpia nimeltä tunnettuja kreikkalaisia matemaatikoita. Hän syntyi Samoksen saarella n. vuonna 570 eaa. ja matkusteltuaan Egyptissä ja Babyloniassa perusti nimeään kantavan koulukunnan Etelä-Italian Krotoniin (nykyään Crotone). Pythagoraan lauseeksi yleisesti kutsuttu tulos on ainakin jossakin muodossa tunnettu Lähi-Idässä jo ennen Pythagorasta. Antiikin aikana tulos esitettiin neliöiden alojen avulla, algebrallinen kaava on vasta paljon myöhemmin syntynyt muoto. *MacTutor*-sivustossa on tarkempia tietoja Pythagoraan elämästä: http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Pythagoras.html.

[2]Keisari Napoleon oli kiinnostunut matematiikasta ja harrasti sitä. Hänen nimeään kantava lause lienee kuitenkin ollut tunnettu jo ennen häntä.

[3]Viiden esimerkkiväittämän todistukset löytyvät monista oppikirjoista ja nykyään myös verkkosivuilta. Pythagoraan lauseen ja kolmion korkeusjanojen leikkauspisteen todistus ovat alkeisoppikirjojen materiaalia, mutta ne löytyvät myös verkkosivuilta: http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/ sisältää yli sata erilaista todistusta Pythagoraan lauseelle, sivulla http://www.cut-the-knot.org/triangle/altitudes.shtml on useita todistuksia korkeusjanojen leikkauspisteelle. Napoleonin lause voidaan todistaa paitsi alkeisgeometrisesti, myös algebraa käyttäen. Useita todistuksia on sivulla http://www.cut-the-knot.org/proofs/napoleon.shtml. Ellipsiä koskevaa tulosta kutsutaan ellipsin heijastusominaisuudeksi, ja se voidaan todistaa joko algebrallisesti tai geometrisesti, ks. esim. http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/ReflectionInEllipse.shtml. Pallon alaa koskevat tulokset ovat alunperin peräisin *Arkhimedeelta* 200-luvulta eaa. Hakusanoilla 'area', 'sphere', 'Archimedes' on verkosta löydettävissä useita artikkeleita. Nykyopiskelija todistaa tuloksen yleensä differentiaali- ja integraalilaskennalla. Vrt. myös artikkeliin *Ympyrä, pallo ja luku* π sivulla 24.

[4]Englanniksi käännetty kommentoitu *Stoikheia* löytyy verkkosivuilta osoitteesta http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html, kreikankielinen teksti osoitteesta http://www.physics.ntua.gr/~mourmouras/euclid/.

[5]Elämäkerrat löytyvät *MacTutor*-sivustosta, jossa on myös artikkeli paralleeliaksioomasta ja epäeuklidisen geometrian syntyhistoriasta: http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/HistTopics/Non-Euclidean_geometry.html.

[6]Hyperbolista epäeuklidista geometriaa voi kokeellisesti tutkia dynaamisen geometrian periaatteita noudattavalla ohjelmalla *NonEuclid*: http://www.cs.unm.edu/~joel/NonEuclid/NonEuclid.html. Sivustossa on myös epäeuklidisia geometrioita käsitteleviä artikkeleita.

[7]Hilbertin elämäkerta: http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Hilbert.html. Teos *Grundlagen der Geometrie* on saatavissa sähköisessä muodossa (saksaksi): https://archive.org/details/grunddergeovon00hilbrich. Johdanto (Einleitung) ja ensimmäisen luvun alku antavat melko helposti kuvan uudesta lähestymistavasta. Tiivistelmä aksioomista on myös Wikipediassa: http://de.wikipedia.org/wiki/Hilberts_Axiomensystem_der_

euklidischen_Geometrie (saksaksi), http://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert%27s_axioms (englanniksi).

[8]Yksinkertaisin äärellinen geometria on *Fanon taso*, jossa on vain seitsemän pistettä ja seitsemän suoraa. Ks. esim. https://en.wikipedia.org/wiki/Fano_plane.

[9]Ks. esim. http://fi.wikipedia.org/wiki/Reaaliluku.

[10]Lisätietoja ryhmän määrittelystä ja sen päälle rakentuvasta ryhmäteoriasta löytyy kaikista abstraktin algebran oppikirjoista. Verkkolähteitä ovat mm. Wikipedia-artikkelit http://en.wikipedia.org/wiki/Group_%28mathematics%29 ja http://en.wikipedia.org/wiki/Group_theory sekä Turun yliopiston algebran kurssin luennot http://matta.hut.fi/matta/algebra/algebra.html. Artikkeli http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/HistTopics/Development_group_theory.html antaa kuvan ryhmäteorian synnystä ja kehityksestä sekä yhteyksistä geometriaan. Hakutermillä 'group theory' löytyy verkosta paljon muutakin.

[11]Rubikin kuutiosta ryhmäteoreettisesti on kirjoitettu useita artikkeleita, esim. http://www.geometer.org/rubik/group.pdf ja http://www.math.harvard.edu/~jjchen/docs/Group%20Theory%20and%20the%20Rubik%27s%20Cube.pdf.

2 Harppi ja viivoitin

[1]Perinteisesti geometriset konstruktiot on tehty kynällä paperille. Tietotekniikka on tuonut uuden mahdollisuuden, konstruoinnin kuvaruudulla vieläpä siten, että lähtökohtana olevia objekteja voidaan siirrellä ja konstruktion periaate säilyy. Tämä mahdollistaa vaihtoehtojen tutkimisen piirtämättä monia kuvioita: millaisia ratkaisuja eri tapauksissa syntyy, millaisia ominaisuuksia niillä näyttäisi olevan. Ohjelmia kutsutaan dynaamisen geometrian ohjelmiksi. Tunnetuin, joskaan ei vanhin on *GeoGebra*, `http://www.geogebra.org/`.

[2]Tuloksen on todistanut ns. käänteissäteiseen muunnokseen perustuen *August Adler* vuonna 1906 ilmestyneessä kirjassaan *Theorie der geometrischen Konstruktionen*. Se on kuitenkin ollut tunnettu jo kauemmin, ja sitä kutsutaankin yleensä *Mohrin ja Mascheronin lauseeksi*. *Lorenzo Mascheroni* (1750–1800) oli italialainen matemaatikko, joka ratkaisi vuonna 1797 ilmestyneessä teoksessaan *Geometria del compasso* kaikki Eukleideen perustehtävät yksinomaan harpilla. Hänkään ei ollut ensimmäinen, vaan tanskalainen *Georg Mohr* (1640–1697) oli jo vuonna 1672 esittänyt samanlaiset ratkaisut teoksessaan *Euclides Danicus*, joka kuitenkin jäi vaille huomiota eikä sitä Mascheronikaan liene tuntenut.

[3]Useita pelkällä harpilla tehtäviä konstruktioita on esitetty yliopistotason alkeisoppikirjassa *Erkki Rosenberg*, *Geometria*, Limes ry., uusin painos 1996.

[4]*MacTutor*-sivustossa on artikkelit klassisista ongelmista: `http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Indexes/Greeks.html`.

[5]Verkkodokumentteja kulman jaosta kolmeen yhtä suureen osaan on paljon. Sopivat hakusanat ovat 'angle trisection' (tai 'Winkel Dreiteilung' tms.). Ongelma myös kiinnostaa monia edelleen, ja erilaisia konstruktioita tarjotaan mahdottomuustodistuksesta välittämättä.

3 Ympyrä, pallo ja luku π

[1]Suomessa kuten yleensäkin manner-Euroopassa puhutaan 13 *biljoonasta* desimaalista. Englantia puhuvissa maissa desimaaleja sanotaan olevan 13 *triljoonaa*. Tällaiset erot lukusanojen nimityksissä ovat sekaannuksen lähde monissa yhteyksissä. Tietokoneiden ja algoritmien kehittyminen parantaa jatkuvasti mahdollisuuksia π:n lukuarvon laskemiseen. Uusia ennätyksiä ilmoitetaan muutamien vuosien välein. Ks. esim. `http://www.numberworld.org/digits/Pi/`.

[2]Luvun π historiaa käsittelee *MacTutor*-sivuston artikkeli `http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/HistTopics/Pi_through_the_ages.html`. Myös Wikipedian artikkelia `http://en.wikipedia.org/wiki/Pi` kannattaa katsoa.

[3]Kreikkalaisella Σ-kirjaimella (iso sigma) merkitään summia: Lausekkeessa $\sum_{k=1}^{n} A_k$ summan termit ovat muotoa A_k, missä *indeksi k* vaihtelee termistä toiseen. Σ-merkin alapuolella osoitetaan indeksin alin arvo ja yläpuolella ylin. Siten

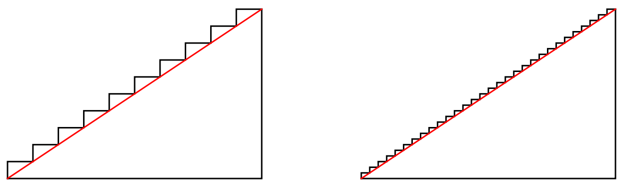
$$\sum_{k=1}^{n} A_k = A_1 + A_2 + \cdots + A_n \quad \text{ja} \quad \sum_{k=1}^{n} (k-1) = 0 + 1 + 2 + \cdots + (n-1).$$

[4]Aritmeettinen summa voidaan laskea helposti muodostamalla summa kahteen kertaan termit vastakkaisissa järjestyksissä ja laskemalla termit yhteen pareittain, esimerkiksi

$$\begin{aligned}&(1+2+3+\cdots+98+99+100)+(100+99+98+\cdots+3+2+1) = \\ &(1+100)+(2+99)+(3+98)+\cdots+(98+3)+(99+2)+(100+1) = 100\cdot 101,\end{aligned}$$

jolloin summa on $50 \cdot 101 = 5050$. Kaikkien aikojen ehkä suurimman matematiikon *Carl Friedrich Gaussin* (1777–1855) kerrotaan opettajansa hämmästykseksi keksineen menettelyn seitsemänvuotiaana.

[5]Kun suorakulmaisessa kolmiossa hypotenuusa korvataan porrasviivalla oheisen kuvion mukaisesti, on porrasviivan pituus sama kuin kateettien pituuksien summa.



Kun porrastusta tihennetään portaat keskenään samankokoisina säilyttäen, porrasviiva lähestyy hypotenuusaa. Kuitenkaan hypotenuusan pituus ei ole kateettien pituuksien summa!

[6]Kaava voidaan todistaa ns. *matemaattisella induktiolla*. Ks. tämän kirjan esitystä artikkelissa *Yksi, kaksi, kolme ...* sivulla 52 tai *Iso-M*-tietosanakirjan artikkelia *Matemaattinen induktio*.

[7]Määrätyn integraalin sijoitusta on merkitty hakasulkulausekkeella, jonka perässä rajat ovat ala- ja yläindeksinä. Yleisesti käytettynä vaihtoehtona (maailmanlaajuisesti) on lausekkeen jälkeen tuleva pystyviiva, jolla rajat ovat indekseinä: $F(x)\Big|_a^b$. Kauttaviivamerkintää $\Big/_a^b F(x)$ ei juurikaan käytetä muualla kuin Suomessa.

4 Miten kerron, missä olen?

[1]Maanmittauslaitoksen ylläpitämän *Kansalaisen karttapaikan* verkko-osoite on http://kansalaisen.karttapaikka.fi/.

[2]Suomenkielisessä tekstissä tulisi desimaalierottimena käyttää pilkkua eikä anglosaksiseen tapaan pistettä. Koordinaattimerkinnöissä pilkku aiheuttaa kuitenkin epäselvyyksiä: $(1, 2, 3, 4)$ ei ole helposti hahmottuva. Koordinaattierottimena voidaan tällaisessa tilanteessa käyttää puolipistettä, $(1, 2; 3, 4)$, mutta tällöin tulisi myös merkitä johdonmukaisesti $(a; b)$, mikä poikkeaa yleisestä käytännöstä. Selkeää olisi siirtyä käyttämään desimaalipistettä (kuten tässä artikkelissa) tai erottaa koordinaatit jollakin muulla tavoin, esimerkiksi pystyviivalla: $(1, 2 \mid 3, 4)$. Tämäkään ei välttämättä hahmotu helposti, jos tarvitaan itseisarvolausekkeita: $(|a| \mid |b|)$.

[3]Kuvaus karttakoordinaateista on yksinkertaistettu. Suorakulmainen koordinaattijärjestelmä voidaan nimittäin ottaa käyttöön usealla eri tavalla. Tarkempia tietoja löytyy Maanmittauslaitoksen verkkosivuilta osoitteesta http://www.maanmittauslaitos.fi/kartat/koordinaatit/koordinaatti-korkeusjarjestelmat.

[4]Kulman suuruus voidaan mitata asettamalla kulman kärki keskipisteenä ympyrä ja laskemalla kulman aukeamaan jäävän ympyränkaaren pituuden suhde ympyrän säteeseen. Tällöin kulman suuruus on ilmaistu *radiaaneissa*. Täysi kulma eli 360° on 2π radiaania, suora kulma $\pi/2$ radiaania. Asteissa ilmaistuna yksi radiaani on noin 57° 17′ 45″. Asteen ja radiaanin ohella käytetään joissakin yhteyksissä muitakin kulman suuruuden yksiköitä, esimerkiksi suoran kulman sadasosaa.

[5]Tarkemmin lukion oppikirjoissa tai esimerkiksi tietosanakirjassa *Iso-M*.

[6]Napakulmaa laskettaessa on otettava huomioon, että esimerkiksi pisteillä $(1, -2)$ ja $(-1, 2)$ saa lauseke $\tan\varphi$ saman arvon, mutta napakulmat eroavat 180 asteella. Oikea kulma on selvitettävä tangenttifunktion ominaisuuksien ja koordinaattien x ja y merkkien avulla. Tätä varten monissa ohjelmointikielissä onkin tavallisen tangentin käänteisfunktion arctan lisäksi käytettävissä kahden argumentin funktio $\arctan(x, y)$, joka antaa suoraan oikean napakulman.

[7]Lauseketta $\tan\varphi = y/x$ koskee sama huomautus kuin napakoordinaattien tapauksessa. arcsin on sinifunktion käänteisfunktio eikä vastaavaa ongelmaa ole.

[8]Tarkemmin Maanmittauslaitoksen verkkosivuilla
http://www.maanmittauslaitos.fi/kartat/koordinaatit/3d-koordinaatistot/.

[9]Tarkemmat tiedot löytyvät hakusanalla 'hyperbelifunktiot' tai 'hyperboliset funktiot' yliopistotason matematiikan peruskurssikirjoista, verkkodokumenteista tai esimerkiksi tietosanakirjasta *Iso-M*.

[10]Vektorialgebran alkeet löytyvät mm. lukion pitkän matematiikan kirjoista, yliopistotason peruskursseista tai tietosanakirjasta *Iso-M*. Hyvä lähde on myös ensimmäinen luku kirjasta *K. Väisälä*, *Vektorianalyysi*, WSOY 1954.

5 Partikkelit pallon pinnalla

[1]Usean muuttujan funktioiden ääriarvoteoria on löydettävissä useista yliopistotason peruskurssioppikirjoista (usean muuttujan analyysi, vektorianalyysi, calculus tms.)

[2]Laskentaohjelma *Mathematican* (`http://www.wolfram.com/mathematica/`) funktiolle `FindMinimum` annetaan muuttujien alkuarvot, ja se yleensä tuottaa jonkin minimikohdan ja vastaavan minimiarvon. Tämä on vain paikallinen minimi, ei välttämättä absoluuttinen. Antamalla erilaisia alkuarvoja voidaan pyrkiä löytämään useita paikallisia minimejä ja näitä vertaamalla mahdollisesti absoluuttinen minimi.

[3]Ongelma tunnetaan myös nimellä *Thomsonin probleema*. Tiivistelmä sen ratkaisuista arvoon $n = 32$ saakka löytyy osoitteesta `http://www.mathpages.com/home/kmath005/kmath005.htm`.

6 Yksi, kaksi, kolme, ...

[1]Peanon elämäkerta on löydettävissä *MacTutor*-sivustosta: http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/Biographies/Peano.html. Joukko-opin ja jossain määrin myös matemaattisen logiikan historiaa käsitellään saman sivuston artikkelissa http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Beginnings_of_set_theory.html.

[2]Standardi SFS-ISO 80000-2, *Luonnontieteissä ja tekniikassa käytettävät matemaattiset merkit ja tunnukset*, joka nimestään huolimatta käsittelee matemaattisia merkintöjä myös yleisesti, määrittelee nollan ensimmäiseksi luonnolliseksi luvuksi. Standardi ei sinänsä ole velvoittava, ja matematiikassa onkin varsin yleistä aloittaa luonnolliset luvut ykkösestä.

[3]Myös Gödelin elämäkertatiedot löytyvät *MacTutor*-sivustosta: http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/Biographies/Godel.html. Gödelin epätäydellisyyslauseesta löytyy paljon verkkoartikkeleita hakusanoilla 'Godel' ja 'incompleteness' tai 'unentscheidbar'. Kiinnostuneet voivat katsoa Gödelin todistuksen modernisoitua englanninkielistä käännöstä http://www.math-wiki.com/images/5/5e/Canon00-goedel.pdf. Tämä ei kuitenkaan ole helpoimpia luettavia.

[4]Lukija voi helpoimmin tarkistaa tuloksen muodostamalla lausekkeiden erotuksen ja sieventämällä sen. Jos tulos on $= 0$, lausekkeet ovat samat.

[5]Induktioketju on muutoin kunnossa, mutta askel $P(1) \implies P(2)$ ei päde. Tällöin nimittäin $n = 1$ ja induktioaskelen todistuksessa vedotaan siihen, että joukossa on $n - 1$ vaaleatukkaista, ts. ei yhtään. Ketju katkeaa, jos yksikin sen lenkeistä katkeaa.

7 Irrationaalilukujen mystiikka

[1]*MacTutor*-sivustossa on Pythagoraan elämää ja ajattelua käsittelevä artikkeli http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Pythagoras.html. Kokonaislukufilosofian ohella Pythagoras tunnetaan ennen kaikkea *Pythagoraan lauseesta*, jonka mukaan suorakulmaisen kolmion hypotenuusan neliö on kateettien neliöiden summa, tavanomaisin merkinnöin $c^2 = a^2 + b^2$.

[2]Suositusten mukaan suomenkielisessä tekstissä tulisi käyttää *desimaalipilkkua* erottamaan luvun kokonaisosa ja desimaalit. Anglosaksisissa maissa käytössä on *desimaalipiste*. Desimaalipilkku on kuitenkin hankala lueteltaessa desimaalilukuja, jolloin pilkkua on luontevaa käyttää erottamaan eri lukuja. Tämän johdosta käytämme tässä tekstissä desimaalipistettä.

[3]Jakokulmia on erilaisia. Suomessa on nykyään käytössä amerikkalainen jakokulma, jossa jaettava asetetaan kulman sisään, jakaja sen vasemmalle puolelle ja osamäärä yläpuolelle. Ennen 1970-lukua käytössä oli ns. italialainen jakokulma, jossa jakokulma on kyljellään oleva T-kirjain, jonka jalka osoittaa oikealle. Jalan yläpuolella on jakaja ja alapuolella osamäärä. Jaettava on jakokulman vasemmalla puolella. Myös muunlaisia jakokulmia on käytössä. Kaikilla on etunsa ja haittansa.

[4]Matemaatikot kiinnostuivat reaalilukujen olemuksesta 1800-luvulla. Merkittäviä nimiä ovat mm. saksalaiset *Richard Dedekind* ja *Georg Cantor* sekä analyysia (differentiaali- ja intgeraalilaskentaa) kehittäneet ranskalainen *Augustin-Louis Cauchy* ja saksalainen *Karl Weierstrass*. Kaksi useimmiten esitettyä reaalilukujen määrittelyprosessia perustuvat *Cauchyn jonojen* ja *Dedekindin leikkausten* käyttöön. Tiivis esitys näistä löytyy Wikipedia-artikkelista http://en.wikipedia.org/wiki/Construction_of_the_real_numbers. *MacTutor*-sivustossa on useita artikkeleita reaaliluvuista: http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Indexes/Analysis.html.

[5]Erilaisia äärettömyyskäsitteitä ja reaalilukujen yllättäviäkin ominaisuuksia käsitellään monissa yliopistotason oppikirjoissa. Suhteellisen hyviä tiivistelmäartikkeleita on mm. Wikipediassa. Ks. esim. http://en.wikipedia.org/wiki/Cardinality,
http://en.wikipedia.org/wiki/Countable_set,
http://en.wikipedia.org/wiki/Cantor%27s_diagonal_argument,
http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/HistTopics/Real_numbers_2.html,
http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/HistTopics/Real_numbers_3.html.
Vastaavat suomenkieliset Wikipedia-artikkelit näyttävät jäävän englanninkielisiä vaatimattomammiksi.

[6]Wikipedia-artikkeli http://en.wikipedia.org/wiki/0.999... esittää useita erilaisia perusteluja yhtälölle $0.99999\ldots = 1$. Artikkelin lopussa viitataan myös reaalilukujoukon laajennuksiin, jotka tuovat uuden näkökulman mm. tähän yhtälöön.

8 Luvun π biljoonat desimaalit

[1]Luvun π historiaa käsitteleviä verkkodokumentteja on paljon. Merkittävimpiä ovat *MacTutor*-sivustosta löytyvät artikkelit *A history of Pi* (http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/HistTopics/Pi_through_the_ages.html) ja *A chronology of pi* (http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/HistTopics/Pi_chronology.html). Muita voi hakea esimerkiksi hakusanoilla 'pi history', 'histoire de pi' tai 'Geschichte Pi'. Matematiikan historiaa käsittelevät kirjat kuten *Carl Boyer, A History of Mathematics*, John Wiley & Sons, suomennettuna nimellä *Tieteiden kuningatar I–II*, Art House 1994, käsittelevät tietenkin luvun π historiaa ja merkitystä varsin laajasti. Laskentaennätyksistä on raportoitu sivulla http://www.numberworld.org/digits/Pi/. Tässä esiintyvä anglosaksisen maailman triljoona on mannereurooppalainen (ja suomalainen) biljoona.

[2]Katso irrationaalilukuja käsittelevää artikkelia sivulla 55.

[3]Todistus on julkaistu vuonna 1947: *Bulletin of the American Mathematical Society* 53(6), sivu 509; http://www.ams.org/journals/bull/1947-53-06/home.html.

[4]Vaikka todistus ei periaatteessa kovin hankala olekaan, siinä on useita kohtia, joiden perusteita — lukijan matemaattisesta harjaantuneisuudesta riippuen — ei ehkä ole helppoa suoraan nähdä. Tämä on tyypillistä matemaattisille teksteille, jotka usein kirjoitetaan aika tiiviisti. Lukija joutuu ottamaan kynän ja paperia laskeakseen itse yksityiskohdat tai piirtääkseen havainnollistavia kuvia.

[5]π:n desimaalien laskemisen tulee perustua ainoastaan neljään peruslaskutoimitukseen. Funktioiden käyttö ja niiden arvojen laskeminen merkitsisi vaativampaa numeerista laskentaa kuin π:n laskeminen. Neliöjuurifunktio on sikäli poikkeus, että sen arvot on mahdollista laskea tehokkaasti Newtonin iteraatiolla $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + a/x_n)$, missä tarvitaan vain neljää peruslaskutoimitusta. Iteraatio antaa varsin nopeasti luvun a positiivisen neliöjuuren suurellakin tarkkuudella, kun lähtöarvoksi x_0 valitaan jokin positiiviluku.

[6]Merkitsevien numeroiden katoa esiintyy numeerisessa laskennassa, jossa lukujen esittämiseen käytetään kiinteää numeromäärää. Esimerkiksi seitsemää numeroa käytettäessä lukujen 2.000000 ja 1.999876 erotuksessa 0.000124 on vain kolme merkitsevää numeroa, vaikka alkuperäisissä luvuissa merkitseviä numeroita on seitsemän. Lukujen summassa sen sijaan on edelleen seitsemän merkitsevää numeroa: 3.999876.

[7]*Sarjalla* tarkoitetaan äärettömän monen termin summaa. Merkintänä käytetään usein isoa sigma-kirjainta: esimerkiksi $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ tai $\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$. Sarjan sanotaan *suppenevan*, jos sen alkupään termeistä lasketut äärellisen monen termin osasummat lähestyvät jotakin raja-arvoa, kun termien määrää kasvatetaan. Raja-arvoa kutsutaan *sarjan summaksi*.

[8]arctan-funktion sarjakehitelmän (*Taylorin sarjan*) johto löytyy kaikista yliopistoperuskurssien differentiaali- ja integraalilaskennan oppikirjoista. Machinin laskentamenetelmä on johdettu ainakin suomalaisessa klassikossa *Ernst Lindelöf, Differentiaali- ja integraalilaskenta ja sen sovellutukset I*.

[9]Hakusanoilla 'hexadecimal' tai 'heksadesimaali' löytyy runsaasti verkkoartikkeleita heksadesimaalijärjestelmästä.

[10]Täsmällisempi kuvaus menetelmästä löytyy ainakin ranskankielisestä dokumentista *Formule BBP*, http://fr.wikipedia.org/wiki/Formule_BBP, jossa on myös todistettu BBP-kaavan pätevyys.

[11]Hyvissä laskentaohjelmissa on usein työkalut desimaaliesityksen numeroiden jakautumisen tarkasteluun. Esimerkiksi π:n miljoonassa ensimmäisessä desimaalissa eri numerot näyttävät jakautuvan varsin tasaisesti. Tulosten luotettavuus on luonnollisesti käytössä olevien algoritmien hyvyyden varassa.

9 Imaginaariyksikön tarina

[1]Matemaatikoiden elämäkertoja ja artikkeleita matematiikan historiasta on *MacTutor*-verkkosivuilla `http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/`. Laaja esitys matematiikan historiasta hamasta muinaisuudesta melkein nykyaikaan saakka on kirjassa *Carl Boyer, A History of Mathematics*, John Wiley & Sons, suomennettuna nimellä *Tieteiden kuningatar I–II*, Art House 1994, 982 sivua.

[2]Kompleksilukujen määrittely lukupareina ja lukuparien välisten laskutoimitusten määrittely on löydettävissä monista yliopistotason peruskurssioppikirjoista ja lähes kaikista (erikielisistä) kompleksianalyysin tai funktioteorian oppikirjoista. Yhtenä mahdollisuutena on verkkomateriaali *Simo Kivelä, Kompleksiluvut*, `http://matta.hut.fi/matta/kompleksiluvut/cluvut.pdf`.

[3]Laskutoimituksen määrittely geometrisen konstruktion avulla saattaa tuntua yllättävältä. Periaatteessa minkä tahansa kahden olion välinen laskutoimitus — kuten yhteen- tai kertolasku — on kuitenkin vain sääntö, joka liittää näihin olioihin kolmannen yleensä samaa tyyppiä olevan olion. Jotta tätä on mielekästä kutsua laskutoimitukseksi, sillä tulee olla ainakin joitakin laskutoimitukselle tyypillisiä ominaisuuksia kuten esimerkiksi liitännäisyys tai osittelulait. Kompleksilukujen yhteen- ja kertolaskun geometrinen määrittely on esitetty animaationa verkkosivulla `http://matta.hut.fi/matta/geogebra/c.html`.

[4]*Mathematica* (`http://www.wri.com/`) on *Maplen* (`http://www.maplesoft.com/`) ohella merkittävimpiä symbolisia (lausekkeita käsitteleviä) laskentaohjelmia. Tällaisissa ohjelmissa pyritään mahdollisimman suureen yleispätevyyteen, jolloin niiden antamat kaavat saattavat näyttää tarpeettomankin mutkikkailta. Tavoitteena on, että käyttäjän ei tarvitse huolehtia mahdollisista erikoistapauksista, vaan ohjelma suoriutuu laskennasta missä tahansa tilanteessa.

[5]Algebran peruslauseesta ja kompleksilukujen juurista on animaatiot verkkosivulla `http://matta.hut.fi/matta/demot.html`.

[6]Tarkempi esitys polynomeista, juurten laskemisesta ja kompleksifunktioista on löydettävissä erikielisistä kompleksianalyysin tai funktioteorian oppikirjoista. Lyhyt tiivistelmä on myös verkkomateriaalissa *Simo Kivelä, Kompleksiluvut*, `http://matta.hut.fi/matta/kompleksiluvut/cluvut.pdf`.

10 Vektori — yleistyksen yleistys

[1]Kuva esittää tilannetta kolmiulotteisessa avaruudessa. Tasoon piirretty kuva voidaan tulkita kahdella eri tavalla: joko vektori $\vec{j}$ osoittaa katsojasta poispäin ja tilannetta katsotaan yläviistosta tai $\vec{j}$ osoittaa katsojan puolelle ja kuvaa katsotaan alaviistosta. Molemmat tulkinnat on mahdollista hahmottaa, joskin edellinen lienee luontevampi. Tällöin myös koordinaatisto on oikeakätinen (kuten yleensä on tapana ajatella). Vrt. koordinaatteja käsittelevään artikkeliin sivulla 32.

[2]Kantavektoreiden ei tarvitse olla yksikönpituisia tai toisiaan vastaan kohtisuoria. Oleellista on, että jokainen vektori voidaan lausua niiden avulla yhteenlaskua ja skalaarilla kertomista käyttäen ja että niitä on mahdollisimman vähän. Näihin ominaisuuksiin viitataan puhumalla kantavektoreiden *virittävyydestä* ja *lineaarisesta riippumattomuudesta*.

[3]Matriisilasku on laaja matematiikan osa-alue, josta on lukuisia oppikirjoja, mm. *Simo Kivelä, Matriisilasku ja lineaarialgebra*, Otakustantamo 1989.

[4]Skalaaritulon määritelmän ja sille saadun yksinkertaisen lausekkeen välisen yhteyden todistaminen ei ole aivan suoraan nähtävissä. Kumpaakin käytetään skalaaritulon määritelmänä, jolloin toinen on luonteeltaan lause (teoreema), joka on todistettava. Alkeisoppikirjat ja verkkoartikkelit esittävät tuloksen tavalla tai toisella. Hakusanoina voi käyttää ’scalar product’, ’inner product’, ’dot product’, ’Punktprodukt’, ’produit scalaire’ tms.

[5]Matematiikassa esiintyy alakulttuureja: Esitetty määritelmä on fyysikoiden käyttämä, matemaatikot ottavat liittoluvun jälkimmäisen vektorin komponenteista.

[6]Kunnan (engl. *field*) määritelmä on löydettävissä yliopistollisista abstraktin algebran oppikirjoista. Verkkodokumentteja löytyy myös, esimerkiksi http://fi.wikipedia.org/wiki/Kunta_(matematiikka) tai sen muunkieliset vastineet http://en.wikipedia.org/wiki/Field_(mathematics), http://fr.wikipedia.org/wiki/Corps_commutatif, http://de.wikipedia.org/wiki/Körper_(Algebra) jne. Määritelmä ja joitakin esimerkkejä löytyy suomenkielisestä luentomateriaalista http://matta.hut.fi/matta/algebra/algebra.html.

[7]Vektoriavaruuksien aksiomaattinen määrittely löytyy yleensä *lineaarialgebran* oppikirjoista, mutta se on lähtökohtana myös monissa pidemmälle tähtäävissä matematiikan kirjoissa. Verkkodokumentteja löytyy hakusanoilla ’vektoriavaruus’, ’lineaariavaruus’, ’lineaarialgebra’ sekä myös ’matriisilaskenta’, jossa yleensä lähtökohtana on vektoriavaruuden käsite, tai näiden muunkielisillä vastineilla. Alkeita voi katsoa esimerkiksi luentomateriaalista http://matta.hut.fi/matta/algebra/algebra.html.

[8]Tällöin puhutaan saksalaisen matemaatikon *David Hilbertin* (1862–1943) mukaan nimetyistä *Hilbertin avaruuksista*. Ranskalainen matemaatikko *Jean Baptiste Joseph Fourier* (1768–1830) esitti vuonna 1807 lämmönjohtumisen differentiaaliyhtälön ratkaisun trigonometristen sarjojen avulla. Näitä kutsutaan nykyään Fourier’n sarjoiksi ja ne nähdään yhtenä Hilbertin avaruuksien teorian sovelluksena. Asetelma on aika tyypillinen: ensin tutkitaan jotakin tiettyä suhteellisen konkreettista probleemaa ja vasta paljon myöhemmin kehittyy abstrakti teoria, joka sisältää sen erikoistapauksenaan.

11 Helsingistä Tokioon

[1]Tiivis esitys vektorialgebran tärkeimmistä tuloksista on esimerkiksi tietosanakirjassa *Iso-M*. Tulosten todistuksia ei kirjassa ole, mutta ne löytyvät mm. yliopistotason alkeisoppikirjoista, osittain myös lukion kirjoista. Skalaarituloa kutsutaan myös *sisätuloksi* tai *pistetuloksi*, vektorituloa myös *ristituloksi*.

[2]Kumpi tahansa ominaisuus voidaan ottaa määritelmäksi ja todistaa toinen tähän pohjautuen.

[3]Aste on yleisimmin käytetty yksikkö ilmoitettaessa kulmien suuruuksia. Muitakin mahdollisuuksia on. Matemaattisissa yhteyksissä käytetään yleensä *radiaania*, joka määritellään sen ympyränkaaren pituutena, joka jää kulman sisään, kun kulman kärki keskipisteenä piirretään yksikkösäteinen ympyrä. Täysi kulma on tällöin 2π radiaania ja 180 asteen kulma π radiaania. Yksi radiaani on $180/\pi \approx 57°$.

[4]Determinanteissa voi olla myös useampia rivejä, mutta sellaisia ei tässä tarkastelussa tarvita. Esitetty kaksirivisen determinantin määritelmä ei ole suoraan yleistettävissä useampirivisiin. Vektoritulo esitetään usein myös kolmirivisenä determinanttina; tämä määritelmä on yhtäpitävä tässä esitetyn lausekkeen kanssa.

[5]Tässä on merkitty leveysastetta kreikkalaisella kirjaimella ϑ (*theeta*) ja pituusastetta kirjaimella φ (*fii*), mutta muitakin kirjaimia käytetään. Varsin yleistä on merkitä leveysastetta kirjaimella φ ja pituusastetta kirjaimella λ (*lambda*). Luettelo kaikista kreikkalaisista kirjaimista on esimerkiksi sivulla `http://www.cs.tut.fi/~jkorpela/alfa.html`.

[6]Katso koordinaatteja käsittelevää artikkelia (sivu 32).

[7]Taulukkokirjoista löytyy usein melkoinen määrä hieman sekavasti järjestettyjä trigonometrian kaavoja, joiden hahmottaminen on vaikeata. Kovin monta kaavaa ei kuitenkaan tarvitse muistaa: loput voidaan suhteellisen helposti johtaa näistä. *Iso-M*-tietosanakirjaan on pyritty keräämään tarpeelliset kaavat helposti hahmotettavaan järjestykseen.

[8]Laskut ovat muodostuneet varsin mutkikkaiksi. Matematiikkaan ei ole kuninkaan tietä, ja esitetyn yksityiskohtainen laskeminen onkin hyvä harjoitus. On kuitenkin syytä muistaa, että mutkikkaiden lausekkeiden loppuun asti sieventäminen ei aina ole järkevää, vaan on parempi siirtyä numeeriseen laskentaan, jos lausekkeita muokkaamalla ei enää päästä yksinkertaiseen tai rakennetta hahmottavaan muotoon. Optimaalisen kohdan valitseminen ei aina ole helppoa ja se riippuu myös siitä, millaisia numeerisia laskentavälineitä on käytettävissä.

12 Miten kuvat syntyvät?

[1]Mahdollisimman 'oikeannäköisistä' perspektiivikuvista kiinnostuttiin varhaisrenessanssin aikana. Tuolloin selvitettiin perspektiivilait ja monet taiteilijat alkoivat kokeilla perspektiivipiirustuksen tarjoamia mahdollisuuksia. Merkittävin perspektiivin geometristen perusteiden tutkija oli nürnbergiläinen taidemaalari, graafikko ja geometrikko *Albrecht Dürer*, (1471–1528). Aivan uudesta asiasta ei kuitenkaan ollut kysymys, sillä jo antiikin ajalta tunnetaan teoksia, joissa on tavoiteltu perspektiiviominaisuuksia. Keskiajalla perspektiivistä ei juurikaan oltu kiinnostuneita.

[2]Kolmiulotteinen (3D-) mallinnus on johtanut uuteen kiinnostukseen perspektiiviä kohtaan. Analysoimalla Ihanteellinen kaupunki -maalausta on luotu kohteena olevasta kaupungista kolmiulotteinen malli (`http://www.isprs.org/proceedings/XXXV/congress/yf/papers/941.pdf`).

[3]Projektiokuvausten matematiikkaa käsitellään *deskriptiivisessä geometriassa* ja matemaattisessa *perspektiiviopissa*. Aihetta käsitteleviä suomenkielisiä kirjoja ovat ainakin seuraavat: *U. Graf, E. J. Nyström*, *Deskriptiivinen geometria*, Otava 1940; *E. J. Nyström*, *Perspektiivioppi – Perspektivlära*, Teknillisen korkeakoulun moniste 1947; *Simo Kivelä*, *Perspektiivioppi ja aksonometria*, Otakustantamo 1976; *Erkki Rosenberg*, *Geometria*, Limes ry., uusin painos 1996; *Simo Kivelä*, *Perspektiivikuvan geometriset perusteet*, Tammertekniikka 2008.

[4]Muista mahdollisuuksista projektion määrittelemiseen olkoon esimerkkinä seuraava: Kuvatason sijasta käytetään pystysuoraa lieriötä, jonka ulkopuolella kohde sijaitsee. Kohteen pisteet projisioidaan keskusprojektion tapaan jostakin lieriön akselin pisteestä lieriöpinnalle. Tämän jälkeen lieriö leikataan auki jotakin pystyviivaa pitkin ja levitetään tasoksi. Tuloksena syntyy jopa 360 asteen panoraama. Suoran kuvakaan ei enää yleensä ole suora.

[5]Saksalainen *Karl Wilhelm Pohlke* (1810–1876) oli alunperin taidemaalari, mutta toimi myöhemmin deskriptiivisen geometrian ja perspektiiviopin opettajana ja professorina Berliinissä. Hän esitti nimeään kantavan Pohlken lauseen, mutta ei onnistunut todistamaan sitä. Lauseen todisti vuonna 1864 saksalainen matemaatikko *H. A. Schwarz*.

[6]Yhdensuuntaisprojektion ominaisuudet on mahdollista selvittää laskemalla, joskaan tarvittavat kaavat ja niiden johto eivät ole aivan yksinkertaisia. Kuvatkin voidaan käsin piirtämisen sijasta laskea, ja näin toki tietokoneaikakaudella tehdäänkin. Tarkemmat tiedot löytyvät ainakin kirjoista *Simo Kivelä*, *Perspektiivioppi ja aksonometria*, Otakustantamo 1976, ja *Simo Kivelä*, *Perspektiivikuvan geometriset perusteet*, Tammertekniikka 2008.

[7]Pakopiste on saksaksi *Fluchtpunkt*, mistä johtuu sille yleisesti käytetty symboli F. Katoamispiste on vastaavasti *Verschwindungspunkt*. Geometrinen traditio on Saksassa varsin vahva ja huolellisimmat esitykset perspektiivikuvien teoriasta ovat usein saksankielisiä. Varsinkin muualla käsitteet usein sekoitetaan, ja katoamispisteellä saatetaan tarkoittaa pakopistettä. Animaatio `http://wwwopt.mathematik.tu-darmstadt.de/~bokowski/raiwi/FluchtAni.html` antaa hieman tässä esittämäämme yleisemmän kuvan suoran projisioitumisesta keskusprojektiossa.

13 Ruprecht von der Pfalzin probleema

[1]Tarkempia tietoja Ruprecht von der Pfalzista on *Wikipedian* englannin- ja saksankielisillä verkkosivuilla `http://en.wikipedia.org/wiki/Prince_Rupert_of_the_Rhine` ja `http://de.wikipedia.org/wiki/Ruprecht_von_der_Pfalz,_Herzog_von_Cumberland`.

[2]Deskriptiivistä geometriaa on tekniikan alan opistoissa ja korkeakouluissa opetettu 1970-luvulle saakka. Merkittävin suomenkielinen oppikirja on *Ulrich Graf, E. J. Nyström, Deskriptiivinen geometria* vuodelta 1940. Tämän jälkeen on ilmestynyt muitakin, modernimpia oppikirjoja, mutta klassikon asemaa ne eivät ole saavuttaneet. Deskriptiivistä geometriaa luonnehdittiin piirtämisen kieliopiksi, ja sitä opetettiin teknisen suunnittelun ja konstruktiopiirustusten laatimisen apuvälineeksi. Tietokonegrafiikan kehittyessä siirrettiin suunnitteluprosessi tietokoneille vähitellen 1960-luvulta lähtien. Tällöin alettiin puhua CAD-ohjelmistoista (CAD = Computer Aided Design). Vähitellen näihin on kehitetty myös työkalut kolmiulotteisen geometrian mallintamiseen (so. kolmiulotteisten objektien käsittelyyn laskennallisin keinoin). Tietokonegrafiikan kehittyminen on viimeisen 20 vuoden aikana tuonut vastaavia työkaluja myös moniin matemaattisiin laskentaohjelmiin ja ns. dynaamisen geometrian ohjelmiin.

[3]Elämäkertatiedot Gaspard Mongesta löytyvät mm. *MacTutor*-verkkosivuilta ja *Bibm@th*-sivustosta: `http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/BiogIndex.html` (englanniksi), `http://www.bibmath.net/bios/index.php` (ranskaksi).

[4]Tarkempia tietoja Schmidin–Eckhartin menetelmästä, joka saksaksi tunnetaan nimillä *Einschneideverfahren* ja *Schnellrißverfahren*, on löydettävissä saksankielisistä deskriptiivisen geometrian kirjoista, esimerkiksi *Walter Wunderlich, Darstellende Geometrie I, II*, Hochschultaschenbücher, Bibliographisches Institut AG, Mannheim, 1967. Aiheesta on myös lyhyt Wikipedia-artikkeli saksaksi `http://de.wikipedia.org/wiki/Einschneideverfahren`.

[5]*Mathematica*-ohjelmiston (`http://www.wri.com/mathematica/`) mahdollisuudet graafisten kuvien tekemiseen ovat laajentuneet merkittävästi muutamassa viimeisessä versiossa. Dynaamisen geometrian ohjelmien mahdollisuuksista esimerkiksi sopii *GeoGebralla* (`http://www.geogebra.org/`) laadittu Ruprect von der Pfalz -animaatio: `http://matta.hut.fi/matta/geogebra/rupert.html`. Tämän sisältämät sovelmat löytyvät myös erillisinä osoitteista `https://www.geogebra.org/material/simple/id/254995` ja `https://www.geogebra.org/material/simple/id/255007`.

14 Leikkaavatko yhdensuuntaiset suorat?

[1]Tarkemmat tiedot analyyttisesta geometriasta sisältyvät lukion matematiikan kursseihin. Tiivistetty esitys on löydettävissä *Iso-M*-tietosanakirjan geometriaa käsittelevistä artikkeleista.

[2]Esitys antaa ainoastaan lyhyen johdatuksen projektiivisen geometrian ideaan. Kyseessä on varsin rikas matematiikan ala. Näköaloja eteenpäin aukeaa esimerkiksi pisteiden ja suorien välisestä symmetriasta: Kummatkin esitetään homogeenisilla koordinaateilla; ehto, joka esittää pisteen kuulumisen suoralle tai suoran kulkemisen pisteen kautta, on pisteen ja suoran suhteen symmetrinen. Rakennetta kutsutaan pisteiden ja suorien väliseksi *dualiteetiksi*. Paitsi projektiivista tasoa voidaan myös muodostaa *projektiivinen avaruus* vastaavanlaisella menettelyllä. Projektiivisesta geometriasta on lukuisia oppikirjoja, ei tosin juurikaan suomeksi. Myös verkkokursseja löytyy.

[3]Tarkemmat tiedot *Pappos* (myös: *Pappus*) *Aleksandrialaisesta* löytyvät esimerkiksi *MacTutor*-verkkosivuilta `http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/Biographies/Pappus.html`. Interaktiivinen demonstraatio Pappoksen lauseesta on sivulla `http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/Pappus.shtml`.

15 Matematiikan tärkein käsite

[1]1800-luvun jälkipuoliskolla useat saksalaiset matemaatikot kiinnostuivat reaalilukujen olemuksesta ja äärettömyyden käsitteestä. Tämä johti *joukko-opiksi* kutsutun matematiikan osa-alueen syntymiseen. Merkittäviä nimiä ovat *Georg Cantor* (1845–1918), *Karl Weierstrass* (1815–1897), *Leopold Kronecker* (1823–1891) ja *Richard Dedekind* (1831–1916). Sittemmin joukko-opista on tullut monien matematiikan osa-alueiden lähtökohta.

[2]Puhuttaessa joukoista ja niiden alkioista on tapana käyttää *joukko-opin* merkintöjä. Esimerkiksi merkintä $x \in A$ tarkoittaa, että x on joukon A alkio. Tiivis esitys joukko-opin merkinnöistä samoin kuin funktiokäsitteestä löytyy esimerkiksi tietosanakirjan *Iso-M* joukko-oppia ja funktiota käsittelevistä luvuista.

[3]Merkintä tarkoittaa ns. *suljettua väliä*, so. väliä, jonka alkupiste on -1 ja loppupiste 1 ja jossa sekä alku- että loppupiste otetaan mukaan. Jos niitä ei oteta mukaan, kyseessä on *avoin väli*, jonka merkinnässä yleensä käytetään väärinpäin olevia hakasulkuja: $]-1,1[$.

[4]Katso esim. *Iso-M*-tietosanakirjaa.

[5]Matemaattisissa yhteyksissä kulman yksikkönä käytetään yleensä radiaania, joka määritellään sen ympyränkaaren pituutena, joka jää kulman sisään, kun kulman kärki keskipisteenä piirretään yksikösäteinen ympyrä. Radiaaneissa ilmoitettu kulman suuruus on kerrottava tekijällä $180/\pi$, jotta saadaan suuruus asteissa.

[6]Amerikkalainen *National Institute of Standards and Technology* on julkaissut verkkosivuston matemaattisista funktioista *Digital Library of Mathematical Functions*, http://dlmf.nist.gov/. Tämä sisältää varsin kattavan informaation funktioista: määritelmät, kuvaajia, kaavoja jne.

[7]Gammafunktion nimenä käytettävä symboli Γ on kreikkalainen kirjain (iso) *gamma*. Tiivistelmiä funktion ominaisuuksista löytyy monista verkkolähteistä, esimerkiksi http://dlmf.nist.gov/5, http://mathworld.wolfram.com/GammaFunction.html ja http://en.wikipedia.org/wiki/Gamma_function.

[8]Besselin funktiot ovat saaneet nimensä saksalaisen tähtitieteilijän *Friedrich Wilhelm Besselin* (1784–1846) mukaan, ks. esim. http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Bessel.html. Syynä funktioiden tutkimiseen olivat eräät taivaanmekaniikan probleemat. Tiivistelmiä Besselin funktioiden ominaisuuksista löytyy esimerkiksi verkkolähteistä http://dlmf.nist.gov/10, http://mathworld.wolfram.com/BesselFunction.html ja http://en.wikipedia.org/wiki/Bessel_function.

[9]Kymmenjärjestelmäesitys $0.83333\ldots$ tarkoittaa lauseketta

$$8 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2} + 3 \cdot 10^{-3} + 3 \cdot 10^{-4} + 3 \cdot 10^{-5} + \ldots.$$

Vastaavasti kolmekantaisen järjestelmän esitys 0.21111 tarkoittaa lauseketta

$$2 \cdot 3^{-1} + 1 \cdot 3^{-2} + 1 \cdot 3^{-3} + 1 \cdot 3^{-4} + 1 \cdot 3^{-5} + \ldots.$$

Kumpikin näistä voidaan laskea geometrisen sarjan summana, jolloin tuloksena on $\frac{5}{6}$.

[10]Mercatorin projektion esitti flaamilainen kartografi *Gerhardus Mercator* vuonna 1569. *Antti Rasilan* artikkeli http://solmu.math.helsinki.fi/2007/1/mercator.pdf sisältää hyvän johdatuksen Mercatorin projektioon, mutta hakusanoilla 'Mercator projection' löytyy paljon muitakin verkkolähteitä.

[11]Oikeastaan pitäisi kirjoittaa $\mathrm{D}(\sin) = \cos$, sillä D kuvaa *funktiot funktioille* ja $\sin x$ oikeastaan tarkoittaa funktion sin arvoa, kun argumenttina on x, vastaavasti $\cos x$ oikeastaan on funktion cos arvo pisteessä x. Perinteen vaikutuksesta on usein kuitenkin tapana käyttää hieman epätäsmällistä merkintää, jossa argumentti x on mukana.

16 Intuitiosta määrittelyyn: jatkuvuus

[1]Jatkuvuutta käsittelevä demonstraatio on osoitteessa http://matta.hut.fi/matta/geogebra/jatkuvuus.html. Vaihtoehtona on http://matta.hut.fi/matta/mma/jatkuvuus.nbp, mutta tämä edellyttää, että käytettävissä on laskentaohjelma *Mathematica* tai ilmaiseksi saatava *CDF Player* (http://www.wolfram.com/cdf-player/).

17 Konkreettisesta abstraktiin: jatkuvuus

[1]Joukkoja merkitään usein isoilla kirjaimilla, alkioita pienillä. Merkintä $x \in A$ tarkoittaa, että x on joukon A alkio. Voidaan myös sanoa, että x kuuluu joukkoon A. Merkintä $B \subset A$ tarkoittaa, että B on joukon A *osajoukko*, ts. jokainen B:n alkio on myös A:n alkio. Joukko voidaan määritellä muotoa $\{x \mid p(x)\}$ olevalla lausekkeella: joukkoon otetaan ne alkiot, jotka toteuttavat pystyviivan oikealla puolella olevan ehdon $p(x)$; esimerkiksi $\{x \mid x > 1\}$. Tiivistelmä joukko-opin merkinnöistä löytyy mm. *Iso-M*-tietosanakirjasta.

[2]Joukko-opin luojana pidetään saksalaista matemaatikkoa *Georg Cantoria*, 1845–1918. Monien muiden matematikoiden työt vaikuttivat joukko-opin käsitteistön käyttöön ottamiseen ja edelleen kehittämiseen, ks. esim. *A history of set theory*, http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/HistTopics/Beginnings_of_set_theory.html. Ranskassa on 1900-luvulla julkaistu kirjasarja *Éléments de mathématique*, jossa tavoitteena on ollut esittää kahdennenkymmenennen vuosisadan matematiikka joukko-oppiin ja ankaraan loogiseen päättelyyn perustuen. Tekijäksi on merkitty *Nicolas Bourbaki*, mutta tämännimistä matemaatikkoa ei ole koskaan ollut, vaan taustalla on ryhmä merkittäviä ranskalaisia matemaatikkoja. Art Housen vuonna 1992 julkaisemassa kirjassa *Symbolien metsässä* on varsin värikäs Bourbakin tarina kerrottu nimellä *Nicolas Bourbaki in memoriam*, kirjoittajana *Osmo Pekonen*.

[3]Suomessa kuten monissa muissakin maissa tuotiin 1970-luvun alussa joukko-oppi matematiikan opetukseen peruskoulun ensimmäiseltä luokalta lähtien. Muutos oli epäonnistunut ja siitä luovuttiin muutaman vuoden kuluttua. Kyseessä oli lähinnä joukko-opin merkityksen ja bourbakismin väärinymmärrys.

[4]Lausuma 'jos ja vain jos' tarkoittaa ehtojen *yhtäpitävyyttä*. Esimerkissä siis ehdosta 'jokaisen avoimen joukon alkukuva on avoin' seuraa funktion jatkuvuus, ja toisaalta funktion jatkuvuudesta seuraa, että jokaisen avoimen joukon alkukuva on avoin. Muotoa 'jos ja vain jos' on tapana käyttää *lauseissa* eli *teoreemoissa*, joiden todistamisessa on siten osoitettava kummankin seuraamisen eli *implikaation* voimassaolo. *Määritelmissä* esitetään aina käsitteelle yhtäpitävä ehto, ja tällöin siis oikeastaan olisi käytettävä 'jos ja vain jos' -muotoa. Koska kuitenkin määritelmä nimenomaan tarkoittaa yhtäpitävän ehdon antamista, tyydytään yleensä kirjoittamaan vain 'jos'. Tiiviissä esityksessä kuten muistiinpanoissa tai luennoissa 'jos ja vain jos' yleensä lyhennetään muotoon 'joss'. Englanniksi on vastaavasti käytössä muoto 'iff'. Jos esitetty luonnehdinta käsitettäisiin määritelmäksi, siinä sanottaisiin vain 'jos'.

[5]Väliä, johon päätepisteet eivät kuulu, sanotaan *avoimeksi väliksi*. Jos päätepisteet ovat a ja b, tämä on joukko-opin merkinnöillä $\{x \mid a < x < b\}$ ja sille käytetään myös merkintää $]a, b[$. Jos päätepisteet otetaan mukaan, ts. $\{x \mid a \leq x \leq b\}$, puhutaan *suljetusta välistä*. Tälle käytetään hakasulkumerkintää $[a, b]$.

[6]Esimerkki ei ole aivan vakavasti otettava. Metriikalta nimittäin vaaditaan kolme ominaisuutta: $d(x, y) \geq 0$, $d(x, y) = d(y, x)$ ja $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$. Yksisuuntaisten katujen takia ei näistä keskimmäinen välttämättä toteudu!

[7]Hakusanalla 'topologia' (tai 'topology', 'topologie') löytyy varsin paljon verkkoviitteitä. Haut kannattaa erityisesti kohdistaa sivustoihin http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/ ja http://mathworld.wolfram.com/. Hyvä yliopistotason oppikirja esitettyjen käsitteiden täsmälliseen käsittelyyn on *Jussi Väisälä*, *Topologia I*, Limes ry, 4. painos 2007, ja tämän jatko-osa *Topologia II*, Limes ry, 2. painos 2005.

18 Platonista monistojen luokitteluun

[1]Dodekaedrin ja ikosaedrin hahmottaminen saattaa olla hieman vaikeaa. Animaatiot http://matta.hut.fi/matta/etc/dodekaedri/dode.html ja http://matta.hut.fi/matta/etc/ikosaedri/ikosa.pdf pyrkivät antamaan mielikuvan kappaleiden vaiheittaisesta rakentamisesta.

[2]http://hu.wikipedia.org/wiki/Kocka

[3]Monitahokkaista ja niiden ominaisuuksista löytyy runsaasti verkkomateriaalia esimerkiksi hakusanoilla ′polyhedron′ (′polyedre′, ′polyeder′), ′Platon′ (′Plato′, ′Platonic′), ′Kepler, ′Poinsot′, ′solid′. Käsitteellä on myös useampiulotteinen yleistys. Tästä voi hakea tietoja hakusanalla ′polytope′, mutta käsitteen määritelmä saataa hieman vaihdella eri lähteissä. Merkittävimpiä lähteitä ovat *MathWorld* (http://mathworld.wolfram.com/) ja erikieliset Wikipedia-artikkelit. *Wolfram Demonstrations Project* -sivustossa on interaktiivinen dokumentti http://demonstrations.wolfram.com/PolyhedraSpheresAndCylinders/, jossa monitahokkaita voidaan pyöritellä kuvaruudulla. Edellytyksenä on ilmaisen *CDF Player* -ohjelman (http://www.wolfram.com/cdf-player/) asentaminen omaan koneeseen (ja lisäosana (plugin) selaimeen).

[4]Eulerin elämäkerta löytyy *MacTutor*-sivustosta, http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Euler.html.

[5]Aihetta ja sen tutkimuksen historiaa käsittelee suomeksikin ilmestynyt kohtuullisen yleistajuinen kirja *Donal O'Shea, Poincarén konjektuuri*, Terra Cognita 2012. Poincarén elämäkerta *MacTutor*-sivustossa: http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Poincare.html.

19 Käyriä ja pintoja laskemaan

[1]*MacTutor*-verkkosivusto sisältää muun ohella osaston *Famous Curves Index*, http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Curves/Curves.html, jossa esitellään kuutisenkymmentä klassista käyrää.

[2]Muotoa $F(x, y, z) = 0$ oleva yhtälö esittää yleensä kolmiulotteisen avaruuden *pintaa*, mikäli yleensä löytyy pisteitä (x, y, z), jotka sen toteuttavat. Esimerkiksi $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ on pallopinta.

[3]Verkosta löytyy sykloideja ja trokoideja havainnollistavia animaatioita paljon, esimerkiksi http://matta.hut.fi/matta/mma/sykloidi.cdf ja http://matta.hut.fi/matta/mma/epihyposykloidi.cdf, jotka edellyttävät ilmaiseksi saatavan *CDF Playerin* (http://www.wolfram.com/cdf-player/) lataamista (tai laskentaohjelma *Mathematicaa*). Animaation voi muodostaa myös *GeoGebran* (http://www.geogebra.org/) avulla.

[4]Bézier'n käyrän teoreettisena pohjana ovat *Bernsteinin polynomit*, jotka juutalais-venäläis-ukrainalainen *Sergei Bernstein* esitti 1910-luvun alussa. Puoli vuosisataa myöhemmin Citroënilla työskennellyt *Paul de Casteljau* ja Renaultilla työskennellyt *Pierre Bézier* kehittivät algoritmit niiden käyttämiseen tietokoneavusteisen suunnittelun (CAD, Computer Aided Design) työvälineinä.

[5]Koulukurssin reaaliarvoisen funktion derivaatta luonnehditaan usein kuvaajan tangentin kulmakertoimeksi. Tämä ei päde vektoriarvoisen funktion tapauksessa. Käyrän parametriesityksen derivaatta on (yleensä) käyrän tangenttivektori (tasossa tai avaruudessa), mutta mistään kulmakertoimesta ei voida puhua.

[6]Animaatio http://matta.hut.fi/matta/mma/BezierKayra.cdf esittää yksinkertaista Bézier'n käyrää, jonka muotoa voidaan säätää siirtämällä hiirellä ohjauspisteitä. Animaatiota varten tarvitaan joko *Mathematica* tai *CDF Player*.

[7]Lauseke $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ on *binomikerroin*. Tässä esiintyvä $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ on *kertoma*. Esimerkiksi $4! = 24$, $2! = 2$ ja $1! = 1$. Erikseen määritellään $0! = 1$. Binomikertoimet voidaan järjestää *Pascalin kolmioksi*.

[8]Vastaava animaatio on osoitteessa http://matta.hut.fi/matta/mma/BSpline.cdf. *Mathematica* tai *CDF Player* tarvitaan.

[9]Pintojen muokkausta voi kokeilla osoitteessa http://matta.hut.fi/matta/mma/BezierPinta.cdf. *Mathematica* tai *CDF Player* tarvitaan.

20 Venytetty S

[1]*Arkhimedes* oli antiikin ajan ehkä monipuolisin matemaatikko, sekä teoreetikko että soveltaja. Alkuperäisiä Arkhimedeen teoksia ei ole säilynyt, mutta osa hänen töistään tunnetaan muissa teksteissä olevista viittauksista sekä arabian ja latinan kielisistä käännöksistä. Merkittävin lähde on 1900-luvun alussa Istanbulissa löydetty *palimpsesti*, ts. uudelleen kirjoitettu pergamentti. Tällä on alunperin ollut ennen vuotta 1000 kirjoitettu kopio Arkhimedeen teoksista, mutta pergamentti on 1200-luvulla pesty puhtaaksi ja käytetty uudelleen uskonnolliseen tekstiin. Arkhimedeen teksti on kuitenkin kyetty lukemaan. *MacTutor*-sivustosta löytyy Arkhimedeen elämäkerta, http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Archimedes.html. Paljon muutakin materiaalia löytyy verkosta. Palimpsestilla on omat sivunsa http://archimedespalimpsest.org/.

[2]*MacTutor*-elämäkerrat:
Newton, http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Newton.html;
Leibniz, http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Leibniz.html.

[3]Matematiikan historiaa käsittelevät kirjat kuten *Carl Boyer*, *A History of Mathematics*, John Wiley & Sons, suomennettuna nimellä *Tieteiden kuningatar I–II*, Art House 1994, sisältävät luonnollisesti seikkaperäisen esityksen differentiaali- ja integraalilaskennan synnystä ja myöhemmästä kehityksestä. Hieman helpommin luettava on *E. T. Bell*, *Men of Mathematics*, joka on vuonna 1963 ilmestynyt suomeksi nimellä *Matematiikan miehiä*, WSOY. Verkkosivulla http://www.mhhe.com/math/calc/smithminton2e/cd/tools/timeline/ on aikajana *The History of Calculus*, josta ilmenevät merkittävimmät differentiaali- ja integraalilaskennan kehitykseen vaikuttaneet matemaatikot. Verkkohauissa on syytä käyttää myös differentiaali- ja integraalilaskennasta englannissa käytettyä nimitystä 'calculus'.

[4]Differentiaali- ja integraalilaskennasta eli matemaattisesta analyysista on tavattoman paljon oppikirjoja, verkkomateriaaleja ja verkkokursseja. Englanninkielisiä esimerkkejä verkkomateriaaleista ovat vaikkapa MIT:n (*Massachusetts Institute of Technology*) avoin verkkokurssi http://ocw.mit.edu/courses/mathematics/18-01-single-variable-calculus-fall-2006/ ja *Khan Academyn* videomateriaalit osoitteessa https://www.khanacademy.org/. Näistä löytyy konkreettisia esimerkkejä integraalien ja pinta-alojen, tilavuuksien yms. laskemisesta analyysin päälauseen avulla.

21 Kuparipallon jäähdytys

[1]Derivaatta määritellään differentiaalilaskennassa erotusosamäärän raja-arvoksi. Tarkempi esitys on löydettävissä kaikista differentiaalilaskennan oppikirjoista ja myös *Iso-M*-tietosanakirjasta.

[2]Differentiaaliyhtälöistä ja niiden ratkaisumenetelmistä on useita oppikirjoja, myös suomeksi. Lyhyt maininta käsitteestä on *Iso-M*-tietosanakirjassa. Laajempia esityksiä ovat esimerkiksi oppikirja *O. Martio, J. Sarvas, Tavalliset differentiaaliyhtälöt*, Yliopistopaino 1987, ja verkkomateriaali *Simo Kivelä, DelTa*, `http://matta.hut.fi/matta/delta2/delta.html`, joka on ilmestynyt myös kirjana nimellä *DelTa, tavalliset differentiaaliyhtälöt*, MFKA-kustannus 2003.

[3]Tavallisia alkeisfunktioita ovat potenssit, trigonometriset funktiot käänteisfunktioineen, eksponentti- ja logaritmifunktiot sekä näistä peruslaskutoimituksilla saatavat yhdistetyt funktiot.

[4]Kyseessä on ensimmäisen kertaluvun lineaarinen vakiokertoiminen differentiaaliyhtälö. Tällaisten ratkaisumenetelmät löytyvät kaikista differentiaaliyhtälöiden oppikirjoista.

[5]Yhtenä mahdollisuutena on *pienimmän neliösumman menettelyn* soveltaminen. Jos mittaukset tehdään ajanhetkinä t_j, $j = 1, 2, \ldots$ ja saadut lämpötilat ovat T_j, $j = 1, 2, \ldots$, saadaan jokaista mittausta kohden yhtälö $T(t_j) = T_j$. Jos nämä eivät voi toteutua samanaikaisesti, etsitään vakiolle k sellainen arvo, joka minimoi neliösumman $(T(t_1) - T_1)^2 + (T(t_2) - T_2)^2 + \ldots$. Lisätietoja löytyy verkkodokumenteista, esimerkiksi `http://mathworld.wolfram.com/LeastSquaresFitting.html`. Sopivia hakusanoja lisädokumenttien etsimiseen ovat 'pienin neliösumma', 'method least squares', 'methode kleinsten quadrate', 'methode moindres carres'.

22 Vesisäiliön täyttäminen

[1]Määrätyn integraalin määrittely summan raja-arvona on löydettävissä kaikista differentiaali- ja integraalilaskennan oppikirjoista. Tällöin usein rajoitutaan tarkastelemaan pinta-aloja, mutta määrätyn integraalin käsite soveltuu moniin muihinkin yhteyksiin. Tiivis lukiotasoinen esitys on tietosanakirjassa *Iso-M*. Vrt. myös integraalikäsitettä käsittelevään artikkeliin sivulla 168.

[2]Yhdistetyn funktion derivoimissääntö ja differentiaaliyhtälön käsitteen määrittely löytyvät differentiaali- ja integraalilaskennan oppikirjoista. Tiiviit esitykset löytyvät myös *Iso-M*-tietosanakirjasta.

[3]*Leonhard Euler* oli 1700-luvulla elänyt sveitsiläissyntyinen matemaatikko, joka vaikutti lähinnä Berliinissä ja Pietarissa. Hänen vaikutuksensa matematiikan kehitykseen oli erittäin monipuolinen ja hänen nimeään kantavia yhtälöitä, kaavoja, menetelmiä yms. on paljon. Eulerin elämäkerta *MacTutor*-sivustossa: `http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Euler.html`.

[4]Differentiaaliyhtälöiden ratkaisemista käsitteleviä kirjoja on paljon. Yleensä kuitenkin analyyttiset (symboliset) menetelmät, joilla etsitään tarkkaa ratkaisua, ja likimääräiset (mutta varsin tarkoiksi kehitetyt) numeeriset menetelmät esitetään eri kirjoissa. Molempia on ainakin jossakin määrin käsitelty oppikirjassa *O. Martio, J. Sarvas, Tavalliset differentiaaliyhtälöt*, Yliopistopaino 1987, ja verkkomateriaalissa *Simo Kivelä, DelTa*, `http://matta.hut.fi/matta/delta2/delta.html`, joka on ilmestynyt myös kirjana nimellä *DelTa, tavalliset differentiaaliyhtälöt*, MFKA-kustannus 2003.

23 Planeettaliike

[1]Keplerin ja Newtonin elämäkerrat ovat löydettävissä mm. *MacTutor*-verkkosivuilta: http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Kepler.html, http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Newton.html. Kummankin viitteen lopussa on linkkejä planeettaliikettä (ja muutakin) käsitteleviin artikkeleihin.

[2]Newtonin mekaniikan peruskäsitteet löytyvät riittävässä laajuudessa jokaisesta yliopistotason mekaniikan kirjasta. Verkkolähteistä kannattaa mainita ainakin *Eric Weisstein*, *World of Physics*, http://scienceworld.wolfram.com/physics/.

[3]Differentiaaliyhtälön ja -yhtälöryhmän käsitteestä, ryhmän muuntamisesta ns. normaaliryhmäksi ja numeerisesta ratkaisemisesta on löydettävissä perustiedot esimerkiksi verkkomateriaalista *Simo Kivelä*, *DelTa*, http://matta.hut.fi/matta/delta2/delta.html. Tämä on ilmestynyt myös kirjana nimellä *DelTa, tavalliset differentiaaliyhtälöt*, MFKA-kustannus 2003.

[4]Interaktiivinen demonstraatio nimeltään *Planeettaliike* on verkkosivulla http://matta.hut.fi/matta/demot.html. Sen avaamiseen tarvitaan joko laskentaohjelma *Mathematica* tai *CDF Player*, joka on ladattavissa ilmaiseksi osoitteesta http://www.wolfram.com/cdf-player/.

24 Matemaattinen kaaos

[1]Lorenzin differentiaaliyhtälösysteemi ja kuvia sen kaoottisista ratkaisuista on esitetty esimerkiksi Wikipedia-artikkelissa `http://en.wikipedia.org/wiki/Lorenz_system`.

[2]Hakusanalla 'fractal' löytyy verkosta paljon kauniita kuvia. Joukossa on kuitenkin myös dokumentteja, jotka pyrkivät valottamaan fraktaalien teoriaa. Kaaoksessakin on säännöllisyyttä!

[3]*Mandelbrotin joukko* lienee tunnetuin fraktaali. Sen määrittely perustuu kompleksilukuja koskevaan iteraatiokaavaan $z_{n+1} = z_n^2 + c$, missä $n = 0, 1, 2, \ldots$. Tämän avulla lasketaan luvusta $z_0 = 0$, ts. origosta aloittaen kompleksilukujono $z_0,\ z_1,\ z_2,\ \ldots$, joka riippuu kompleksiluvusta c. Jos jono pysyy rajoitettuna, ts. ei karkaa äärettömän kauaksi, niin luku c kuuluu Mandelbrotin joukkoon. Kompleksilukuja ajatellaan tällöin tason pisteinä. Iteraatiokaava voidaan esittää myös xy-tason pisteitä koskevana: uusi piste (x_{n+1}, y_{n+1}) lasketaan edellisestä pisteestä (x_n, y_n) kaavojen

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n^2 - y_n^2 + c_x \\ y_{n+1} = 2x_n y_n + c_y \end{cases}$$

avulla. Aloituspisteenä on origo $(x_0, y_0) = (0, 0)$. Piste (c_x, c_y) kuuluu Mandelbrotin joukkoon, jos sen avulla muodostettu pistejono ei karkaa äärettömyyteen. Tarkempi esitys Mandelbrotin joukosta on esimerkiksi MathWorld-sivustossa: `http://mathworld.wolfram.com/MandelbrotSet.html`. Erilaisia kuvia löytyy verkosta paljon. Selkeä mustavalkokuva on esimerkiksi `https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Mandelbrot_DEM_Sobel.png`.

[4]Matemaattiset ongelmat voidaan usein ratkaista hyvinkin erilaisiin ajattelutapoihin perustuen. Pienimmän neliösumman ongelmakin voidaan ratkaista myös geometrian avulla, jolloin tarvitaan alkeisgeometrian yleistystä moniulotteisiin avaruuksiin: pisteen lyhin etäisyys tasosta löydetään asettamalla pisteen kautta suora, joka on kohtisuorassa tasoa vastaan, ts. joka on tason normaali. Tarkastelutapa johtaa matriisialgebralliseen yhtälöön.

[5]Avainkäsite on *differentiaali*, jolle löytyy määritelmä mm. *Iso-M*-tietosanakirjasta. Hyvät yliopistotasoiset differentiaalilaskennan oppikirjat myös esittävät differentiaalin käsitteen, mahdollisesti myös linearisoinnin.

25 Mistä todennäköisyydet tulevat?

[1]Bertrandin paradoksia on analysoitu tarkemmin mm. verkkosivulla http://en.wikipedia.org/wiki/Bertrand_paradox_(probability).

[2]Todenäköisyyslaskennan historia alkaa 1600-luvulta, jolloin kyseessä oli lähinnä uhkapeleihin liittyvien todennäköisyyksien ja strategioiden pohdiskelu. Seuraavina vuosisatoina monet muillakin aloilla ansioituneet matemaatikot kehittivät teoriaa ja 1800-luvulla virinnyt yleinen kiinnostus matematiikan perusteisiin johti Kolmogorovin aksioomiin. Ks. esim. https://en.wikipedia.org/wiki/History_of_probability ja https://en.wikipedia.org/wiki/Timeline_of_probability_and_statistics. Kolmogorovin elämäkerta *MacTutor*-sivustossa: http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Kolmogorov.html.

[3]Kombinatoriikka (engl. combinatorics) tarkoittaa tietyt ehdot täyttävien lukumäärien laskemista. Tiivistelmäartikkeleita ovat esimerkiksi https://en.wikipedia.org/wiki/Combinatorics (vastaava suomenkielinen Wikipedia-artikkeli on huomattavasti niukempi) ja http://mathworld.wolfram.com/topics/Combinatorics.html. Tärkeimmät kombinatoriset työkalut esitetään usein todennäköisyyslaskennan oppikirjoissa (vaikka ne ovatkin käytöltään yleisempiä eivätkä ainoastaan todennäköisyyslaskentaan liittyviä). Tärkeimmät löytyvät myös *Iso-M*-tietosanakirjasta.

[4]Normaalijakaumaan liittyvät todennäköisyydet, ts. kuvan 171 mukaiset pinta-alat saadaan periaatteessa integroimalla tiheysfunktio kyseessä olevan välin yli. Koska integraalifunktiota (*kertymäfunktiota*) ei voida lausua tavallisten alkeisfunktioiden avulla, arvot otettiin aiemmin valmiiksi lasketuista taulukoista. Nykyään laskimissa ja tietokoneohjelmissa arvojen laskeminen on valmiiksi ohjelmoituna.

[5]Todennäköisyyslaskenta matematiikan alana tarjoaa joukon työkaluja todennäköisyyksien laskemiseen. Alkeiskursseilla aloitetaan yleensä kombinatoriikasta ja jakaumista, mutta varsin pian tarvitaan lisää käsitteitä ja näitä koskevia teoreemoja. Oppikirjoja ja verkkomateriaaleja on paljon. Suomenkielisistä kannattaa mainita jo hieman vanhat (mutta pätevät) *Pekka Tuominen*, *Todennäköisyyslaskenta I*, Limes ry, 2. painos 1993, ja *Pertti Laininen*, *Todennäköisyys ja sen tilastollinen soveltaminen*, Otatieto 1998.

[6]Buffonin neulaprobleeman teoreettinen ratkaisu, esim. http://fi.wikipedia.org/wiki/Buffonin_neula tai http://mathworld.wolfram.com/BuffonsNeedleProblem.html.