Tehtäviä

Tehtävät kiertelevät. Nämä tehtävät on kaikki jostain lainattu. Jos lähde on vielä tiedossa, se on merkitty sulkeisiin tehtävän jälkeen. Pelkät vuosiluvut kertovat, milloin tehtävää on käytetty Suomen matematiikkavalmennuksessa harjoitus- tai koetehtävänä.

1. Veljekset möivät n lammasta hintaan n dollaria/lammas. Rahat jaettiin niin, että vanhempi veli otti ensin 10 dollaria, sitten nuorempi otti 10 dollaria jne., kunnes oli nuoremman veljen vuoro ottaa rahaa, jota ei kuitenkaan enää ollut kymmentä dollaria. Tällöin sovittiin, että nuorempi veli saa loput rahat sekä vanhemman linkkuveitsen, ja jako menee tasan. Minkä arvoinen oli linkkuveitsi? (2001)

2. Reaaliluvut a ja b toteuttavat yhtälöt

$$a^3 - 3ab^2 = 20, \qquad b^3 - 3a^2b = 40.$$

Määritä $a^2 + b^2$. (2001)

3. Olkoon

$$a_n = \left\lfloor \frac{n}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{n}{n} \right\rfloor.$$

Osoita, että $a_n = 2 + a_{n-1}$ silloin ja vain silloin, kun n on alkuluku. (2001)

4. Todista, että kaikilla luonnollisilla luvuilla n luku $2^n + n^2$ on jaollinen 5:llä silloin ja vain silloin, kuin luku $n^2 \cdot 2^n + 1$ on jaollinen 5:llä. (2001)

5. Määritä kaikki alkuluvut n, joiden kymmenjärjestelmäesitys on $n = 10101\ldots01$. (2001)

6. Määritä kymmenjärjestelmässä kirjoitetun luvun 2001^{2001} numeroiden summan numeroiden summan numeroiden summa. (2001)

7. Olkoon p kaikkien sellaisten funktioiden lukumäärä, jotka on määritelty joukossa $\{1, 2, \ldots, m\}$, m positiivinen kokonaisluku, ja joiden arvot kuuluvat joukkoon $\{1, 2, \ldots, 35, 36\}$ ja olkoon q kaikkien sellaisten funktioiden lukumäärä, jotka on määritelty joukossa $\{1, 2, \ldots, n\}$, n positiivinen kokonaisluku, ja joiden arvot kuuluvat joukkoon $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Määritä $|p - q|$:n pienin mahdollinen arvo. (2001)

8. Olkoot $a_1, a_2, \ldots, a_{2001}$ ei-positiivisia lukuja. Todista, että

$$2^{a_1} + 2^{a_2} + \cdots + 2^{a_{2001}} \leq 2000 + 2^{a_1 + a_2 + \cdots + a_{2001}}.$$

9. Neliön $ABCD$ sivun pituus on 1. Olkoon X mielivaltainen sivun AB ja Y mielivaltainen sivun CD piste ja olkoot M XD:n ja YA:n leikkauspiste ja N XC:n ja YB:n leikkauspiste. Määritä ne pisteet X ja Y, joille nelikulmion $XNYM$ ala on suurin mahdollinen. (2001)

10. Suunnikkaan $ABCD$ sivun AD keskipiste on E ja F on pisteen B kohtisuora projektio suoralla CE. Osoita, että ABF on tasakylkinen kolmio. (2001)

11. Pisteet A, B, C ja D ovat pallon pinnan eri pisteitä. Janat AB ja CD leikkaavat toisensa pisteessä F. Pisteet A, C ja F ovat yhtä etäällä pisteestä E. Osoita, että suorat BD ja EF ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. (2001)

12. Teräväkulmaisen kolmion ABC ympäri piirretty ympyrä on Γ. Olkoon P piste Γ:n sisäpuolella. Olkoot X, Y ja Z ne pisteet, joissa suorat AP, BP ja CP myös leikkaavat Γ:n. Määritä ne pisteet P, joille XYZ on tasasivuinen kolmio. (2001)

13. n kiveä asetetaan yhdeksi tai useammaksi kasaksi. Mikä on eri kasoissa olevien kivien lukumäärien tulon suurin mahdollinen arvo? (2001)

14. Määritellään lukujonot (a_n) ja (b_n) seuraavasti: $a_1 = 9$, $b_1 = 3$, $a_{k+1} = 9^{a_k}$, $b_{k+1} = 3^{b_k}$, kun $k = 1, 2, \ldots$ Määritä pienin n, jolle $b_n > a_{2001}$. (2001)

15. Tasossa on annettuina 2000 pistettä. Osoita, että pisteet voidaan yhdistää pareittain 1000 janalla, jotka eivät leikkaa toisiaan. (2001)

16. Eräs tehdas tuottaa samankokoisia säännöllisiä tetraedreja. Tehdas värittää tetraedrinsa maalataan neljällä värillä A, B, C ja D, kukin tahko omallaan. Montako erilaista tetraedria on mahdollista tuottaa? (2001)

17. Maalaiskoulussa on 20 lasta. Jokaisella kahdella lapsella on yhteinen isoisä. Todista, että eräällä isoisällä on ainakin 14 lastenlasta. (2001)

18. Toisessa koulussa oli 13 tyttöä ja 10 poikaa. Opettaja jakoi namusia. Kaikki tytöt saivat keskenään yhtä monta ja kaikki pojat keskenään yhtä monta. Kukaan ei jäänyt ilman. Osoittautui, että tapa, jolla opettaja jakoi namuset, oli ainoa tapa, joka täytti edellä kuvatut ehdot. Montako namusta opettajalla enintään oli? (2001)

19. Todista, että

$$\frac{1}{668} + \frac{1}{669} + \cdots + \frac{1}{2002} = 1 + \frac{2}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{2}{5 \cdot 6 \cdot 7} + \cdots + \frac{2}{2000 \cdot 2001 \cdot 2002}.$$

(2001)

20. Olkoon $\mathbb{N}^*$ positiivisten kokonaislukujen joukko. Määritä kaikki funktiot $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$, joille $f(n+m) = f(n)f(m)$ kaikilla m, $n \in \mathbb{N}^*$ ja joille yhtälöllä $f(f(x)) = (f(x))^2$ on ainakin yksi ratkaisu $x \in \mathbb{N}^*$. (2001)

21. Luvun 1998 numeroista muodostetaan kaikki mahdolliset nelinumeroiset luvut. Kuinka moni niistä voidaan lausua kahden positiivisen luvun neliöiden erotuksena? (1999; Liettua 1998)

22. Tarkastellaan 1998:aa reaalilukua, joiden summa on 0 ja neliöiden summa 1. Osoita, että luvuista voidaan valita kaksi niin, että näiden kahden luvun tulo on enintään $-\dfrac{1}{1998}$. (1999; Liettua 1998)

23. Oletetaan, että $a \geq b \geq c > 0$. Todista, että

$$\frac{a^2-b^2}{c} + \frac{c^2-b^2}{a} + \frac{a^2-c^2}{b} \geq 3a - 4b + c.$$

(1999; Liettua 1998)

24. Ratkaise yhtälö

$$\sin^6 x + \cos^8 x = 1.$$

(1999; Liettua 1998)

25. Määritä a, kun tiedetään, että lauseke

$$(a+1)x^2 - 2(a-1)x + 3a - 3$$

on ei-negatiivinen kaikilla reaaliluvuilla x. (1999; Liettua 1998)

26. Ratkaise yhtälö

$$x^4 - 12x + 3 = 0.$$

(1999; Liettua 1998)

27. Todista, että jokaisesta 13 eri reaaliluvun joukosta voidaan aina valita kaksi lukua x ja y niin, että

$$0 < \frac{x-y}{1+xy} < 2 - \sqrt{3}.$$

(1999; Liettua 1998)

28. Todista, että luku $\underbrace{11\ldots1}_{3n}$, joka koostuu $3n$:stä ykkösestä, on aina jaollinen 37:llä.

(1999; Liettua 1998)

29. Olkoon a_n luvun $\dfrac{n(n+1)}{2}$ viimeinen numero. Laske summa

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{1998}.$$

(1999; Liettua 1998)

30. Määritellään lukujono (a_n) seuraavasti: $a_1 = 6$ jos $n \geq 1$, niin

$$a_{n+1} = \left[\frac{5a_n}{4} + \frac{3}{4}\sqrt{a_n^2 - 12}\right].$$

Osoita, että $a_n - 1$ on jaollinen 10:llä kaikilla $n \geq 2$. (1999; Liettua 1998)

31. Määritä kaikki polynomit $P(x)$, joille

$$P(x^2) = 2xP(x+1) + 3 - 10x - 2x^2.$$

(1999; Liettua 1998)

32. Todista: jos luvun 5^n kymmenjärjestelmäesityksessä on k numeroa, niin luvun 2^n kymmenjärjestelmäesityksessä on $n-k+1$ numeroa. (1999; Liettua 1998)

33. Ratkaise yhtälö

$$[x] + [2x] + [4x] + [8x] + [16x] + [32x] = 12345.$$

(1999; Liettua 1998)

34. Määritä funktion

$$f(x) = |x-1| + |x-2| + |x-3| + \cdots + |x-1998|$$

pienin arvo. (1999; Liettua 1998)

35. Onko olemassa äärellistä joukkoa A, jossa on ainakin neljä alkiota ja jolla on se ominaisuus, että aina kun a, b, c ja d ovat neljä eri A:n alkiota, myös $ab+cd$ on a:n alkio? (1999; Liettua 1998)

36. Oletetaan, että vuoden keskilämpötila jokaisessa Liettuan läänissä on naapuriläänien keskilämpötilojen aritmeettinen keskiarvo. Voiko käydä niin, että keskilämpötila Vilnan läänissä on $6°C$ ja keskilämpötila Klaipėdan läänissä on $5°C$? (1999; Liettua 1998)

37. Tasakylkisen puolisuunnikkaan lävistäjät ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan ja puolisuunnikkaan ala on 10. Määritä puolisuunnikkaan korkeus. (1999; Liettua 1998)

38. Kolmion sisään on piirretty ympyrä ja ympyrälle piirretty tangentti, joka on yhden kolmion sivun suuntainen. Määritä kolmion piiri, kun tiedetään, että em. kolmion sivun pituus on 25 ja kolmion sisään jäävän tangentin osan pituus on 16. (1999; Liettua 1998)

39. Nelikulmiossa $ABCD$ kulmat ABC ja CDA ovat suoria. Leikatkoon A:sta BD:lle piirretty kohtisuora BD:n pisteessä K. Todista, että kulmat BAK ja CAD ovat yhtä suuret. (1999; Liettua 1998)

40. Moneenko osaan neljä suoraa voivat jakaa tason? (1999; Liettua 1998)

41. Kolmion *keskijana* eli *mediaani* on jana, joka yhdistää kolmion kärjen vastakkaisen sivun keskipisyteeseen. Osoita, että kolmion ABC mediaanille AM pätee

$$\frac{1}{2}(AB + AC - BC) < AM < \frac{1}{2}(AB + AC)$$

(2000)

42. Kolmion ABC ympäri piirretyn ympyrän keskipiste on O ja kolmion korkeusjanojen leikkauspiste on H. Todista, että AH on kaksi kertaa pisteen O etäisyys suorasta BC. (2000)

43. Todista: jos tasasivuisen kolmion sisältä valitaan kaksi pistettä, niin kummankin pisteen kolmion kolmesta sivusta laskettujen etäisyyksien summa on sama. (2000)

44. Todista: jokaisessa kolmiossa pitempää sivua vasyaan piirretty kulman puolittaja on lyhempi kuin lyhempää sivua vastaan piirretty kulman puolittaja. [Kolmion kulman puolittajalla voidaan tarkoittaa joko kulman kahteen yhtä suureen osaan jakavaa puolisuoraa tai sitä tämän puolisuoran janaa, jonka päätepisteet ovat kulman kärki ja puolisuoran ja kolmion vastakkaisen sivun leikkauspiste. Tässä käytetään tietysti jälkimmäistä merkitystä.] (2000)

45. Osoita, että jos $2x + 4y = 1$, niin

$$x^2 + y^2 \geq \frac{1}{20}.$$

(2000)

46. Osoita, että kaikilla luonnollisilla luvuilla n pätee

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < \frac{n-1}{n}.$$

(2000)

47. Todista, että jos $|x| < 1$ on reaaliluku ja $n \geq 2$ kokonaisluku, niin

$$(1-x)^n + (1+x)^n < 2^n.$$

(2000)

48. Osoita, että yhtälöryhmän

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ \cdots \\ x_{99} + x_{100} + x_1 = 0 \\ x_{100} + x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

ainoa ratkaisu on $x_1 = x_2 = \cdots = x_{99} = x_{100} = 0$. (2000)

49. Määritä termin x^8 kerroin, kun $(1 + x^2 - x^4)^9$ kirjoitetaan x:n polynomiksi. (2000)

50. n yhdensuuntaista tason suoraa leikkaa toiset m yhdensuuntaista saman tason suoraa. Montako suunnikasta on syntyneessä kuviossa? (2000)

51. Monellako tavalla 36 kortin pakka, jossa on neljä ässää, voidaan jakaa kahtia niin, että kummassakin osassa on kaksi ässää? (2000)

52. Tasossa on kaksi yhdensuuntaista suoraa. Toiselta valitaan n pistettä ka toiselta m pistettä. Montako leikkauspistettä on yhteensä kaikilla janoilla, jotka yhdistävät jonkin n:stä valitusta pisteestä johonkin m:stä valitusta pisteestä? (2000)

53. Todista, että luku $11^{10} - 1$ on jaollinen sadalla. (2000)

54. Todista, että $3^{6n} - 2^{6n}$ on kaikilla $n \geq 0$ jaollinen 35:llä. (2000)

55. Todista, että jokainen luku, joka kirjoitetaan 3^n:llä samalla numerolla, on jaollinen luvulla 3^n (esim. 222 on jaollinen kolmella, 777777777 on jaollinen 9:llä jne). (2000)

56. Olkoon $n > 2$. Osoita, että luvut $2^n + 1$ ja $2^n - 1$ eivät ainakaan molemmat ole alkulukuja. (2000)

57. Olkoon S ympyrä, jonka keskipiste on C ja säde r, ja olkoon P mielivaltainen C:stä eroava piste. Piirrä P:n kautta suora l, joka leikkaa ympyrän pisteissä X ja Y. Olkoon Z janan XY keskipiste. Osoita, että kaikkiin suoriin l liittyvät pisteet Z ovat samalla ympyrällä. Määritä tämän ympyrän keskipiste ja säde. (2000; Norja 1996)

58. Osoita, että $\lfloor\sqrt{n} + \sqrt{n+1}\rfloor = \lfloor\sqrt{4n+1}\rfloor$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. (Merkintä $\lfloor x\rfloor$ tarkoittaa suurinta kokonaislukua, joka on pienempi kuin x. Esim. $\lfloor 1{,}345\rfloor = 1$, $\lfloor 3{,}864\rfloor = 3$ ja $\lfloor 5\rfloor = 5$.) (2000; Norja 1996)

59. Perillä ja Karinilla on kummallakin n paperinpalaa. Kumpikin kirjoittaa papereilleen luvut 1:stä $2n$:ään umpimähkään, yksi luku joka paperin kummallekin puolelle. Osoita, että Per ja Karin voivat asettaa paperinsa pöydälle niin, että jokainen luvuista $1, 2, \ldots, 2n$ näkyy ainakin kerran. (2000; Norja 1996)

60. Olkoon $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (siis x ja $f(x)$ ovat molemmat luonnollisia lukuja) funktio, jolle pätee $f(f(1995)) = 95$, $f(xy) = f(x)f(y)$ ja $f(x) \leq x$. Määritä luvun $f(1995)$ mahdolliset arvot. (2000; Norja 1996)

61. a) Todista, että kaikille positiivisille reaaliluvuille x ja y pätee $\frac{1}{2}(x+y) \geq \sqrt{xy}$. Selvitä, milloin epäyhtälössä vallitsee yhtäsuuruus. b) Todista, että kaikille positiivisille reaaliluvuille pätee

$$\frac{x}{x+y} \cdot \frac{y}{y+z} \cdot \frac{z}{z+x} \leq \frac{1}{8}.$$

(1999)

62. Piirrä kulma $\angle ABC$ ja kiinnitä kyljen BC piste P. Selvitä, miten voi harppia ja viivoitinta käyttäen piirtää ympyrän, joka sivuaa kulman $\angle ABC$ molempia kylkiä ja kulkee pisteen P kautta. Todista, että piirtämälläsi ympyrällä on tämä ominaisuus. (1999)

63. Laske

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{99}}.$$

(1999)

64. Täydennä kertolasku (kirjaimet tarkoittavat eri numeroita):

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & & Y & K & S & I \\
 & & & & Y & K & S & I \\
 & & & & * & * & * & * \\
 & & * & * & * & * & & \\
 & * & * & * & * & & & \\
* & * & * & * & * & * & * & *
\end{array}$$

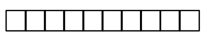
Perustele vastauksesi. (1999)

65. Tarkastellaan seuraavaa "numerovinoneliöiden jonoa":

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
 & & & & & & & & & & & & 1 & & & & \\
 & & & & & & 1 & & & & & 2 & & 2 & & & \\
 & & 1 & & & 2 & & 2 & & & 3 & & 3 & & 3 & & \\
1, & 2 & & 2, & 3 & & 3 & & 3, & 4 & & 4 & & 4 & & 4, & \ldots \\
 & & 3 & & & 4 & & 4 & & & 5 & & 5 & & 5 & & \\
 & & & & & & 5 & & & & & 6 & & 6 & & & \\
 & & & & & & & & & & & & 7 & & & &
\end{array}$$

Mikä on n:nnen vinoneliön lukujen summa. Todista, että vastauksesi on oikein! (1999)

66. Kuvio koostuu kymmenestä vierekkäin olevasta neliöstä.



Monellako eri tavalla neliöt voidaan värittää sinisellä ja punaisella niin, että jokainen neliö on väritetty, mutta mitkään kaksi vierekkäistä neliötä eivät ole punaisia? (1999)

67. Kahdesta samanpituisesta kynttilästä toinen palaa loppuun neljässä ja toinen viidessä tunnissa. Kynttilät sytytetään yhtä aikaa. Monenko tunnin kuluttua toinen on kolme kertaa niin pitkä kuin toinen? (1999)

68. Pisteet P ja Q ovat kolmion ABC sivuilla AB ja AC. Janat CP ja BQ leikkaavat pisteessä S. Kolmioiden BSP, BCS ja CQS alat ovat 5, 10 ja 8 cm^2. Määritä nelikulmion $APSQ$ ala. (1999)

69. Neljän hengen seurueella on mopo, joka kulkee 30 km/h ja kantaa kaksi henkilöä. Tarkoitus on siirtyä paikasta A paikkaan B, joiden välimatka on 45 km. Kävelynopeus on 6 km/h. Miten nopeasti matka on tehtävissä? (1999)

70. Minkälaiset kolmiot voidaan jakaa yhdellä janalla kahdeksi tasakylkiseksi kolmioksi? (1999)

71. Määritä kaikkien sellaisten kolmioiden, joiden ala on S ja joissa yhden sivun pituus on ℓ, joukosta ne, joille kolmion kolmen korkeusjanan pituuksien tulo on mahdollisimman suuri. (1999; Italia 1996)

72. Osoita, että yhtälöllä $a^2 + b^2 = c^2 + 3$ on äärettömän monta kokonaislukuratkaisua $\{a, b, c\}$. (1999; Italia 1996)

73. Olkoot A ja B yksikkösärmäisen kuution kaksi vastakkaista kärkeä. Määritä sellaisen pallon säde, jonka keskipiste on kuution sisällä, joka sivuaa niitä kolmea sivutahkoa, joiden yhteinen piste on A ja niitä kolmea särmää, joiden yhteinen piste on B. (1999; Italia 1996)

74. Määritä kaikkien sellaisten kirjaimista a, b ja c muodostettujen n-kirjaimisten sanojen (kirjainjonojen), joissa on parillinen määrä a-kirjaimia, lukumäärä. (1999; Italia 1996)

75. Olkoon C ympyrä ja A C:n ulkopuolella oleva piste. Liitetään jokaiseen C:n pisteeseen P neliö $APQR$, missä A, P, Q ja R ovat tässä järjestyksessä, kun neliön piiri kierretään vastapäivään. Määritä pisteen Q piirtämä kuvio, kun P käy läpi kaikki C:n pisteet. (1999; Italia 1996)

76. Montako neliötä on vähintään piirrettävä valkoiselle paperille, jotta syntyisi täydellinen $n \times n$-neliöruudukko ("šakkilauta")? (1999; Italia 1996)

77. Todista, että yhtälöllä

$$x^3 - y^3 = xy + 1993$$

ei ole positiivisia kokonaislukuratkaisuja. (1999; Bulgaria 1993)

78. Suorakulmainen kolmio ABC ($\angle ACB = 90°$) on piirretty ympyrän Γ sisään. Olkoon H pisteestä C piirretyn korkeusjanan kantapiste ja M janan BC keskipiste. Pisteiden A ja M kautta kulkeva ympyrä k sivuaa ympyrää Γ. Ympyrä k leikkaa BC:n paitsi pisteessä M myös pisteessä N. Todista, että suora AN kulkee CH:n keskipisteen kautta. (1999; Bulgaria 1993)

79. Olkoot a, b ja c positiivisia lukuja ja pisteet p, q ja r välin $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ pisteitä. Olkoon vielä

$$a + b + c = p + q + r = 1.$$

Osoita, että

$$abc \leq \frac{1}{8}(pa + qb + rc).$$

Voiko epäyhtälössä vallita yhtäsuuruus? (1999; Bulgaria 1993)

80. Olkoot a, b ja c reaalilukuja, joille pätee $9a + 11b + 29c = 0$. Osoita, että yhtälöllä

$$ax^3 + bx + c = 0$$

on juuri välillä $[0, 2]$. (1999; Bulgaria 1993)

81. Teräväkulmaisessa kolmiossa ABC on $BC = \sqrt{2}AC$. Kolmion ympäri piirretty ympyrä on k. Suorat l ja m (jotka ovat eri suoria kuin AC ja BC), kulkevat pisteen C ja leikkaavat suoran AB pisteissä L ja M ja ympyrän k vastaavasti pisteissä P ja Q. Suora PQ leikkaa suoran AB pisteessä N. Osoita: jos $\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{MB}$, niin $AB = NB$. (1999; Bulgaria 1993)

82. Säännöllisen kuusikulmion sivun pituus on 1. Määritä suurin mahdollinen n niin, että kuusikulmion sisällä tai sen sivuilla on n pistettä, joista jokaisen kahden etäisyys on ainakin $\sqrt{2}$. (1999; Bulgaria 1993)

83. $\mathbb{Z}$ on kokonaislukujen joukko. Määritä kaikki funktiot $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, joille $f(1) = 1$ ja

$$f(m+n) \cdot (f(m) - f(n)) = f(m-n) \cdot (f(m) + f(n))$$

kaikilla $m, n \in \mathbb{Z}$. (1999; Bulgaria 1993)

84. Olkoon M kolmion ABC sisäpiste ja olkoon $\angle AMC = 90°$, $\angle AMB = 150°$ ja $\angle BMC = 120°$. Kolmioiden AMC, AMB ja BMC ympäri piirrettyjen ympyröiden keskipisteet ovat P, Q ja R. Osoita, että kolmion PQR ala on suurempi kuin kolmion ABC ala. (1999; Bulgaria 1993)

85. Kahdella pyramidilla on yhteinen kanta $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ ja kärjet B ja C. Särmät BA_i, CA_i, $i = 1, 2, \ldots, 7$, yhteisen kannan lävistäjät ja jana BC on kukin väritetty joko siniseksi tai punaiseksi. Todista, että ainakin yhden kolmion sivut ovat samanväriset. (1999; Bulgaria 1993)

86. Määritä kaikki kokonaisluvut $n > 1$, joille on olemassa positiiviset kokonaisluvut a_1, $a_2, \ldots, a_n$, niin, että mitkään kaksi joukon $\{a_i + a_j \mid 1 \le i \le j \le n\} = S$. alkiota eivät ole kongruentteja modulo $\dfrac{n(n+1)}{2}$. (1999; Bulgaria 1993)

87. Olkoon Oxy tason suorakulmainen koordinaatisto ja olkoon $A_1 = (x_1, y_1)$, $A_2 = (x_2, y_2)$ järjestetty pistepari, $A_1 \ne O \ne A_2$. Liitetään jokaiseen tällaiseen pistepariin reaaliarvoinen funktio $f(A_1, A_2)$, jolla on seuraavat ominaisuudet:

(a) Jos $OA_1 = OB_1$, $OA_2 = OB_2$ ja $A_1A_2 = B_1B_2$, niin $f(A_1, A_2) = f(B_1, B_2)$;

(b) On olemassa sellainen toisen asteen polynomi $F(u, v, w, z)$, että $f(A_1, A_2) = F(x_1, y_1, x_2, y_2)$ jokaiselle järjestetylle parille A_1, A_2.

(c) On olemassa luku $\phi \in (0, \pi)$ siten, että jos A_1, A_2 ovat pisteitä, joille $\angle A_1OA_2 = \phi$, niin $f(A_1, A_2) = 0$.

(d) Jos OA_1A_2 on tasasivuinen kolmio, jonka sivun pituus on 1, niin $f(A_1, A_2) = \dfrac{1}{2}$.

Todista, että $f(A_1, A_2)$ on kaikilla A_1, A_2 sama kuin skalaaritulo $\overrightarrow{OA_1} \cdot \overrightarrow{OA_2}$. (1999; Bulgaria 1993)

88. Määritä kaikki positiiviset kokonaisluvut n joille on olemassa tason n:n pisteen joukko S, siten että kaikilla $A \in S$ on olemassa pisteet X, Y, $Z \in S$, niin että janat AX, AY ja AZ ovat kaikki yksikön pituisia. (1999; Bulgaria 1993)

89. Olkoon $n > 2$ ja olkoon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sellainen funktio, että jokaiselle säännölliselle n-kulmiolle $A_1A_2 \ldots A_n$ pätee

$$f(A_1) + f(A_2) + \cdots + f(A_n) = 0.$$

Osoita, että $f(P) = 0$ kaikilla $P \in \mathbb{R}^2$. (1999; Romania 1996)

90. Määritä suurin n, jolle seuraava väite on tosi: ”On olemassa n eiŒnegatiivista kokonaislukua x_1, x_2, $\ldots$, x_n, näistä ainakin yksi nollasta eroava, niin, että jokaiselle jonolle ε_1, ε_2, $\ldots$, ε_n, missä jokainen $\varepsilon_i \in \{-1, 0, 1\}$ ja ainakin yksi $\varepsilon_i \neq 0$, luku $\varepsilon_1 x_1 + \varepsilon_2 x_2 + \cdots + \varepsilon_n x_n$ on jaoton luvulla n^3.” (1999; Romania 1996)

91. Olkoot x ja y reaalilukuja. Osoita, että jos joukko $\{\cos n\pi x + \cos n\pi y \mid n \in \mathbb{N}\}$ on äärellinen, niin $x \in \mathbb{Q}$ ja $y \in \mathbb{Q}$.

92. Olkoon $ABCD$ jännenelikulmio [nelikulmio, jonka ympäri voidaan piirtää ympyrä] ja M joukko, jonka alkiot ovat kolmioiden BCD, ACD, ABD ja ABC sisään piirrettyjen ympyröiden ja sivuympyröiden [ympyrä, joka sivuaa yhtä kolmion sivua ja kahden muun jatkeita] yhteensä 16 keskipistettä. Osoita, että on olemassa kaksi neljän yhdensuuntaisen suoran joukkoa K ja L siten, että jokainen $K \cup L$:n suora sisältää tasan 4 M:n pistettä.

93. Ympyrällä ζ, jonka keskipiste on O, on annettu pisteet A ja B siten, että $OA \perp OB$. Ympyrät ζ_1 ja ζ_2 sivuavat ζ:aa sisäpuolisesti pisteissä A ja B ja toisiaan ulkopuolisesti. Ympyrä ζ_3 on kulman AOB sisällä ja sivuaa ympyröitä ζ_1 ja ζ_2 pisteissä S ja T sekä ympyrää ζ sisäpuolisesti pisteessä C. Miten suuri on kulma $\angle SCT$? (1999; Romania 1996)

94. Puoliympyrän keskipiste on O ja halkaisija AB. Suora d leikkaa suoran AB pisteessä M ja puoliympyrän pisteissä C ja D niin, että $MB < MA$ ja $MD < MC$. Kolmioiden AOC ja DOB ympäri piirretyt ympyrät leikkaavat toisensa myös pisteessä K. Osoita: $MK \perp KO$. (1999; Romania 1996)

95. Luku $(\sqrt{50} + 7)^{2001}$ kehitetään desimaaliluvuksi. Määritä luvun 1. ja 2001. desimaali. (2001)

96. Kolmion sivujen pituudet ovat peräkkäisiä kokonaislukuja. Yksi kolmion keskijanoista on kohtisuorassa erästä kolmion kulmanpuolittajaa vastaan. Määritä kolmion sivujen pituudet. (2001)

97. Kuutio K on leikattu 99:ksi pienemmäksi kuutioksi. Näistä vain yhdellä särmän pituus ei ole 1. Määritä kuution K tilavuus. (2001)

98. Määritä suurin kokonaisluku d, joka kaikkien lukujen $n(n+1)(2n+2002)$, missä n on positiivinen kokonaisluku, tekijä. (2001)

99. Montako alkiota on suurimmassa joukon $A = \{1, 2, \ldots, 547\}$ sellaisessa osajoukossa, jossa minkään kahden luvun summa ei ole jaollinen 42:lla? (2001)

100. Ympyrät, joiden säteet ovat h ja k, sivuavat suoraa ℓ pisteissä A ja B. Ympyrät leikkaavat toisensa pisteissä C ja D. Todista, että kolmioiden ABC ja ABD ympäri piirrettyjen ympyröiden säteet ovat samat. Määritä tämä säde. (2001)

101. Olkoon positiivisten lukujen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tulo 1. Osoita, että

$$\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + \cdots + \sqrt{a_n} \le a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

102. Seurueen jokaisen neljän jäsenen joukossa on yksi, joka on tuttu kyseisten kolmen muun jäsenen kanssa. Todista, että seurueessa on ainakin yksi jäsen, joka on tuttu seurueen kaikkien muiden jäsenten kanssa. (2001)

103. Varastossa on 2001 juustonpalaa. Todista, että on mahdollista leikata yksi paloista kahteen osaan niin, että palat voidaan kerätä kahteen säkkiin, joiden sisältö painaa yhtä paljon ja joissa on kummassakin yhtä monta palaa. (2001)

104. Kokonaislukukertoimisella n:nnen asteen ($n \ge 5$) polynomilla $P(x)$ on n eri kokonaislukunollakohtaa $0, x_2, x_3, \ldots, x_n$. Määritä polynomin $P(P(x))$ kokonaislukunollakohdat. (2001)

105. Milloin kello 5:n ja kello 6:n välillä kellon minuutti- ja tuntiosoittimet ovat tasan päällekkäin? (2001; Etelä-Afrikka 1998)

106. Selvitä, kuinka monta kokonaislukuratkaisua on yhtälöllä

$$(x^2 - 5x + 5)^{x^2 - 11x + 30} = 1.$$

(2001; Australia 1999)

107. Samankokoisista kuutionmuotoisista valkoisista palikoista rakennetaan isompi kuutio, ja tämän kuution jotkin sivut maalataan punaisiksi. Kuutio pilkotaan taas pikkukuutioiksi. Lasketaan, että 168 pikkukuutiota on tullut ainakin yhdeltä sivultaan punaiseksi. Moniko kuutio on kokonaan valkoinen? (2001; Etelä-Afrikka 1998)

108. Luku 121 on *palindromi*: luvun arvo ei muutu, vaikka se ”luettaisiin lopusta alkuun”. Määritä kokonaisluvut n, joille n^2 on kuusinumeroinen palindromi. (2001; Australia 1999)

109. Kolmion kaksi korkeusjanaa ovat 9 cm ja 29 cm. Kolmannenkin korkeusjanan pituus senttimetreinä on kokonaisluku. Mitkä ovat tämän kolmannen korkeusjanan mahdolliset pituudet? (2001; Etelä-Afrikka)

110. Ympyrän $\mathcal{C}_1$ keskipiste on ympyrän $\mathcal{C}_2$ kehällä. Ympyröiden leikkauspisteet ovat A ja C. Piste B on mielivaltainen ympyrän $\mathcal{C}_2$ kehän piste. Suora BC leikkaa ympyrän $\mathcal{C}_1$ myös pisteessä D. Todista, että $BD = BA$. (2001; Australia 1999)

111. Todista, että jos luku 5^n alkaa (kymmenjärjestelmässä) ykkösellä, niin 2^{n+1} alkaa myös ykkösellä. (n positiivinen kokonaisluku.) Päteekö käänteinen väittämä? (2001; Etelä-Afrikka 1998)

112. Säännöllinen 21-sivuinen monikulmio on piirretty ympyrän sisään. Voiko monikulmion kärjistä valita viisi niin, että syntyneen viisikulmion kaikki sivut ja lävistäjät ovat erimittaisia? [*Ympyrän sisään piirretyn monikulmion* kaikki kärjet ovat ympyrän kehällä.] (2001; Etelä-Afrikka 1998)

113. Nelikulmio $ABCD$ on piirretty ympyrän sisään [eli se on *jännenelikulmio*]. Oletetaan, että nelikulmion lävistäjät ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan ja että lävistäjien leikkauspiste on E. Olkoot vielä U, V, T ja S ne suorien AB, BC, CD ja DA pisteet (tässä järjestyksessä), joille $EU \perp AB$, $EV \perp BC$, $ET \perp CD$ ja $ES \perp DA$. Todista, että $UVTS$ on jännenelikulmio. (2001; Australia 1999)

114. Kokonaisluvuilla x, y ja z ei ole yhteisiä tekijöitä. Todista, että jos $x^2 + y^2 = z^2$, niin luvuista x, y ja z yksi ja vain yksi on jaollinen viidellä. (2001; Australia 1999)

115. $ABCD$ on sellainen nelikulmio, että jokin puoliympyrä, jonka keskipiste O on sivulla AB, sivuaa nelikulmion sivuja BC, CD ja DA. Lisäksi $AO = OB$. Osoita, että $AO^2 = AD \cdot BC$. (2001; Australia 1999)

116. Luvut a_1, a_2 ja a_3 ovat reaalilukuja ja $|a_2x^2 + a_1x + a_0| \leq 1$ aina, kun $|x| \leq 1$. Todista, että $|a_2| \leq 2$. (2001; Australia 1999)

117. Pisteiden A, B, C, D ja E koordinaatit xy-tasossa ovat kokonaislukuja. Todista, että ainakin yhden pisteitä yhdistävän janan keskipisteen koordinaatit ovat myös kokonaislukuja. (2001; Australia 1999)

118. Oletetaan, että luvut a_1, a_2, $\ldots$, a_{2n+1} toteuttavat kaikilla $i = 2, 3, \ldots, 2n$ epäyhtälön $2a_i \leq a_{i-1} + a_{i+1}$. Todista, että

$$\frac{1}{n}(a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n}) \leq \frac{1}{n+1}(a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n+1}).$$

Milloin edellisessä yhtälössä pätee yhtäsuuruus? (2001; Etelä-Afrikka 1998)

119. Luvut $a_0, a_1, \ldots, a_{2002}$ ovat keskenään eri suuria reaalilukuja ja luvut $x_0, x_1, \ldots x_{2002}$ ovat rationaalilukuja. Olkoon

$$P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{2002}x^{2002}.$$

Tiedetään, että a_{592} on irrationaalinen. Osoita, että ainakin yksi luvuista $P(x_0)$, $P(x_1)$, $\ldots$, $P(x_{2002})$ on irrationaalinen. (2001; Etelä-Afrikka 1998)

120. Olkoon $n > 1$ kokonaisluku. Kuinka monella jonon $(1, 2, \ldots, n)$ permutaatiolla $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ on se ominaisuus, että on tasan yksi indeksi $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ jolle $a_{i+1} < a_i$? [Jonon *permutaatio* on jono, jossa alkuperäisen jonon jäsenet esiintyvät jossain mahdollisesti muussa järjestyksessä kuin alkuperäisessä jonossa. Esimerkiksi jonon $(1, 2, 3)$ permutaatiot ovat $(1, 2, 3)$, $(1, 3, 2)$, $(2, 3, 1)$, $(2, 1, 3)$, $(3, 1, 2)$ ja $(3, 2, 1)$.] (2001; Etelä-Afrikka 1998)

121. Eräässä yhdistyksessä on 11 jäsentä. Yhdistyksellä on johtokunta. Joka kokouksen jälkeen johtokunnan koostumus muuttuu niin, että uusi ja vanha johtokunta eroavat tasan yhden jäsenen suhteen (joko siihen otetaan uusi jäsen tai jokin entinen jäsen jää pois). Johtokunnassa on aina oltava ainakin kolme jäsentä, eikä mikään johtokunta saa olla sama kuin jokin aikaisempi johtokunta. Onko mahdollista, että jonkin ajan kuluttua kaikki mahdolliset johtokunnat olisivat kokoontuneet? (2001; Etelä-Afrikka 1998)

122. Sievennä luku

$$3+\cfrac{5+\cfrac{1+\cfrac{1+\cdots}{3+\cdots}}{3+\cfrac{5+\cdots}{1+\cdots}}}{1+\cfrac{5+\cfrac{1+\cdots}{3+\cdots}}{1+\cfrac{5+\cdots}{1+\cdots}}}.$$

(2001; Etelä-Afrikka 1998)

123. Osoita, että jokaista kolmea paritonta positiivista kokonaislukua kohden on olemassa pariton positiivinen kokonaisluku siten, että näiden neljän luvun neliöiden summa on myös neliö. (2001)

124. Määritä kaikki reaaliluvut x, joille pätee

$$\frac{1}{998}\left(\sqrt{2\sqrt{2}x-x^2-1}+\sqrt{2\sqrt{2}x-x^2+2}+\cdots+\sqrt{2\sqrt{2}x-x^2+1995^2-2}\right)=1995.$$

(2001)

125. Kolmioissa ABC ja $A'B'C'$ on $\angle BAC + \angle B'A'C' = 180°$ ja $\angle ABC = \angle A'B'C'$. Osoita, että $aa' = bb' + cc'$. Tässä a, b, c ja a', b' ja c' ovat kolmioiden sivujen pituudet. (2001)

126. Määritä positiiviset kokonaisluvut m, n, k, joille $2^m + 3^n = k^2$. (2001)

127. Olkoon f se positiivisten kokonaislukujen joukossa määritelty funktio, jolle $f(n)$ on välillä $[n, 2n]$ olevien neliölukujen lukumäärä. Osoita, että funktio f saa arvoikseen kaikki positiiviset kokonaisluvut. (2001)

128. Tason pisteille A_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, ja B_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, pätee $A_iB_j = \sqrt{i+j}$ kaikilla i, j. Osoita, että kaikki pisteet A_i ovat eräällä suoralla a, että kaikki pisteet B_j ovat eräällä suoralla b ja että $a \perp b$. (2001)

129. Suora d on avaruudessa ja pisteet A ja B ovat d:n pisteitä. k on positiivinen luku. Määritä niiden pisteiden joukko, jotka ovat kahden sellaisen toisiaan sivuavan pallon sivuamispisteitä, joiden säteiden suhde on k ja joista toinen sivuaa suoraa d pisteessä A ja toinen pisteessä B. (2001)

130. Olkoon h säännöllisen tetraedrin korkeus ja olkoot h_1, h_2, h_3 ja h_4 jonkin tetraedrin sisäpisteen etäisyydet tetraedrin sivutahkoista. Osoita, että $h_1 + h_2 + h_3 + h_4 = h$ ja että

$$\frac{h-h_1}{h+h_1} + \frac{h-h_2}{h+h_2} + \frac{h-h_3}{h+h_3} + \frac{h-h_4}{h+h_4} \geq \frac{12}{5}.$$

(2001)

131. Määritä kaikki reaalikertoimiset polynomit P, jotka eivät ole vakioita ja joille $P(x^2) = P(x) \cdot P(x-1)$. (2001)

132. Olkoon $P(x) = x^3 + x^2 + x + 2$ ja $Q(x) = x^3 - x + 3$. Osoita, että $P(a)$ ei ole jaollinen $Q(a)$:lla millään kokonaisluvulla a. (2001)

133. Osoita, että kokonaisluvut a ja b ovat joko molemmat parillisia tai molemmat parittomia silloin ja vain silloin, kun olemassa kokonaisluvut c ja d siten, että $a^2 + b^2 + c^2 + 1 = d^2$. (2001)

134. Kolmio ABC ei ole tasasivuinen. Olkoot A', B' ja C' tason pisteen M kohtisuorat projektiot suorille BC, CA ja AB. Olkoon $S(M) = AC' + BA' + CB'$. Oletetaan, että M ja N ovat kolmion sisäpisteitä. Osoita, että $S(M) = S(N)$ silloin ja vain silloin, kun $MN \| OI$. O ja I ovat ABC:n ympäri ja sisään piirrettyjen ympyröiden keskipisteet. (2001)

135. Kompleksiluvuille $z_1, z_2, \ldots, z_n$ pätee $|z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n| = 1$. Osoita, että luvuista voidaan valita k kappaletta, $z_{j_1}, z_{j_2}, \ldots, z_{j_k}$, siten, että $|z_{j_1} + z_{j_2} + \cdots + z_{j_k}| \geq \frac{1}{6}$. (2001)

136. Olkoot m ja n, $m \leq n$, positiivisia kokonaislukuja ja p alkuluku. Olkoon $n = a_0 + a_1p + \cdots + a_kp^k$ ja $m = b_0 + b_1p + \cdots + b_kp^k$, missä $0 \leq a_i < p$, $0 \leq b_i < p$ ja $a_k \neq 0$. Osoita:

a) Jos $a_i \geq b_i$ kaikilla i, $0 \leq i \leq k$, niin

$$\binom{n}{m} \equiv \binom{a_0}{b_0}\binom{a_1}{b_1} \cdots \binom{a_k}{b_k} \bmod p.$$

b) Jos $a_i < b_i$ jollain indeksin i arvolla, niin

$$\binom{n}{m} \equiv 0 \bmod p.$$

(2001)

137. Olkoot $a_1, a_2, \ldots, a_n$ reaalilukuja ja olkoon $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. Osoita, että on olemassa reaaliluvut $A_1, A_2, \ldots A_n$ siten, että kaikilla $x \in \mathbb{R} \setminus \{-a_1, -a_2 \ldots, -a_n\}$ pätee

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{x+a_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{x+a_i}.$$

Osoita vielä, että jonon $A_1, A_1 + A_2, \ldots, A_1 + A_2 + \cdots + A_{n-1}$ lukujen etumerkit vuorottelevat. (2001)

138. Olkoon kulman $\angle XOY$ suuruus α, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Olkoon M piste kyljellä OY ja N se piste kyljellä OX, jolle $MN \perp OX$, ja vielä P piste kyljellä OY siten, että $NP \perp OM$. Olkoon Q janan ON keskipiste ja S NP:n ja MQ:n leikkauspiste. Määritä pisteen S ura, kun M liikkuu puolisuoralla OY. Olkoon vielä T puolisuoran OX se piste, jolle $ST \perp OX$. Osoita, että $SP = ST$ silloin ja vain silloin, kun $\cos 2\alpha + 2\cos\alpha = 1$. (2001)

139. Piirretään kolmion ABC kärjestä C puolisuorat $CX \| AB$ ja CY, joka on kulman BAC puolittajan suuntainen, molemmat siinä puolitasossa, jonka reuna on suora AC ja joka sisältää pisteen B. Olkoon F sivun BC piste, D AF:n ja CX:n leikkauspiste ja E BD:n ja CY:n leikkauspiste. Osoita, että kaikki suorat EF kulkevat saman pisteen kautta, riippumatta F:n valinnasta. (2001)

140. Lauseke $(1 - 5x + 5x^2)^{2001}(1 - 4x + 2x^2)^{2002}$ kirjoitetaan polynomimuotoon $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 + a_0$. Määritä $a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1} + a_n$. (2002)

141. Kun eräs polynomi jaetaan polynomilla $x - 1$, saadaan jakojäännös 2 ja kun sama polynomi jaetaan polynomilla $x - 2$, saadaan jakojäännös 1. Määritä jakojäännös, kun sama polynomi jaetaan polynomilla $x^2 - 3x + 2$. (2002)

142. Todista, että polynomi

$$x^{9999} + x^{8888} + x^{7777} + x^{6666} + x^{5555} + x^{4444} + x^{3333} + x^{2222} + x^{1111} + 1$$

on jaollinen polynomilla

$$x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1.$$

(2002)

143. Ratkaise yhtälö

$$\underbrace{\sqrt{x + 2\sqrt{x + 2\sqrt{x + \cdots + 2\sqrt{x + 2\sqrt{3x}}}}}}_{n \text{ juurimerkkiä}} = x.$$

(2002)

144. Olkoot a_1, a_2, …, a_n ja b_1, b_2, …, b_n reaalilukuja. Todista, että

$$\sqrt{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2+(b_1+b_2+\cdots+b_n)^2} \le \sqrt{a_1^2+b_1^2}+\sqrt{a_2^2+b_2^2}+\cdots+\sqrt{a_n^2+b_n^2}.$$

(2002)

145. Todista seuraavat jaollisuusväitteet (n positiivinen kokonaisluku): $3^{6n}-2^{6n}$ on jaollinen 35:llä; n^5-5n^3+4n on jaollinen 120:llä; n^2+3n+5 ei ole jaollinen 121:llä. (2002)

146. $1\cdot2\cdot3\cdot4=5^2-1$; $2\cdot3\cdot4\cdot5=11^2-1$. Onko neljän peräkkäisen kokonaisluvun tulo aina yhtä pienempi kuin jokin neliöluku? (2002)

147. Määritä lukujen 9^{9^9} ja $2^{3^{4^5}}$ viimeinen numero. (2002)

148. Todista, että

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$

ei ole kokonaisluku millään positiivisella kokonaisluvulla $n\ge2$. (2002)

149. Neliöluku päättyy neljään samaan numeroon. Mihin numeroon? (2002)

150. Nauha on jaettu 12:ksi ruuduksi. Osa ruuduista väritetään vihreiksi, osa violeteiksi. Kahta vierekkäistä ruutua ei kuitenkaan saa värittää violeteiksi. Monellako tavalla väritys voidaan suorittaa? (2002)

151. Nelikulmio voidaan jakaa kahdella eri tavalla kahdeksi kolmioksi ja viisikulmio voidaan jakaa viidellä eri tavalla kolmeksi kolmioksi. Selvitä, miten monella tavalla kahdeksankulmio voidaan jakaa kolmioiksi. (2002)

152. Monellako jonon $(1, 2, \ldots, n)$ permutaatiolla $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ on seuraava ominaisuus: jokaisella $j>1$ on olemassa $i<j$ siten, että $|a_i-a_j|=1$? (2002; Etelä-Afrikka 1997)

153. Paula ja Pauli värittävät vuorotellen 7×3-ruudukon ruutuja kullanvärisiksi ja hopeanvärisiksi. Se, joka ensin on onnistunut värittämään jonkin ruudukon suorakaiteen neljä kärkiruutua omalla värillään, on voittaja. Todista, että peli ei koskaan pääty tasan. (2002)

154. Tasossa Π on kupera seitsenkulmio, jonka kärjet ovat A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 ja A_7. Tason ulkopuolella on kaksi pistettä B ja C. Mitkään kolme näistä yhdeksästä pisteestä eivät le samalla suoralla. Janat BC, BA_i, CA_i ja seitsenkulmion 14 sisälävistäjää on kukin väritetty valkoisiksi tai sinisiksi. Osoita, että jotkin kolme janaa muodostavat yksivärisen kolmion. (2002; Australia 1999)

155. Kolmiossa ABC AD on korkeusjana ja H korkeusjanojen leikkauspiste. Todista, että $DC \cdot DB = DH \cdot DA$. (2002)

156. Olkoot D ja E kolmion ABC sivujen AB ja BC pisteitä ja olkoon $DE \| AC$. Osoita, että AE, DC ja kolmion B:stä piirretty keskijana leikkaavat toisensa samassa pisteessä. (2002)

157. Osoita, että tasasivuisen kolmion ympäri piirretyn ympyrän mielivaltaisesta pisteestä P kolmion kärkiin piirrettyjen janojen pituuksien neliöiden summa ei riipu P:n valinnasta. (2002)

158. Suorakulmaisen kolmion sisään piirretyn ympyrän säde on r. Kolmion hypotenuusaa vastaan piirretty korkeusjana on h. Osoita, että

$$\frac{2}{5} < \frac{r}{h} < \frac{1}{2}.$$

(2002)

159. Todista, että ympyrän kahden yhdensuuntaisen jänteen keskipisteiden kautta kulkeva suora kulkee ympyrän keskipisteen kautta. (2002)

160. Unkarilainen laskutaituri *Pataki* laski tulon $95 \cdot 97$ seuraavasti: a) Hän laski luvut yhteen: $95 + 97 = 192$. b) Hän pyyhki ensimmäisen numeron pois: 92. c) Hän vähensi molemmat tulon tekijät 100:sta ja kertoi erotukset. Jos tulo oli yksinumeroinen, hän kirjoitti sen eteen 0:n: $3 \cdot 5 = 15$; d) Hän kirjoitti b- ja c-kohtien vastaukset peräkkäin: 9215. Selvitä, toimiiko Patakin menetelmä kaikille tuloille, joiden tekijät ovat 90:n ja 100:n väliltä. (1995)

161. Neljän peräkkäisen positiivisen kokonaisluvun tulo on 110 355 024. Määritä luvut. (1995)

162. Tunnetusti $n!$ on lyhennysmerkintä tulolle $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$. Selvitä, miten moneen nollaan päättyy luku 50!. (1995)

163. Kun kaikki luvut 1, 2, ..., 99, 100 kirjoitetaan järjestyksessä peräkkäin, syntyy eräs (suurehko) luku

$$12345678910111213 14 \ldots 979899100.$$

Mikä on suurin luku, joka saadaan, kun edellisestä luvusta pyyhitään pois tasan sata numeroa ja loput saavat jäädä entiseen järjestykseen? (1995)

164. Kokonaisluku x alkaa 300:lla ykkösellä, ja lopussa on pelkkiä nollia. Voiko x olla kokonaisluvun toinen potenssi? (1995)

165. Olkoot p_1, p_2, ..., p_{100} suuruusjärjestyksessä 100 pienintä alkulukua. Moneenko nollaan päättyy luku

$$p_1(p_1^2p_2)(p_1^3p_2^2p_3)\cdot\ldots\cdot(p_1^{100}p_2^{99}\cdot\ldots\cdot p_{98}^3p_{99}^2p_{100}).$$

(1995)

166. Mihin numeroon päättyy 2^{100}? (1995)

167. Mihin numeroon päättyy summa

$$11^6+12^6+13^6+14^6+15^6+16^6?$$

(1995)

168. Todista, että luku $2^{2^n}+1$ päättyy aina numeroon 7. (1995)

169. Määritä luvun $3^{999}-2^{999}$ kaksi viimeistä numeroa. (1995)

170. Määritä luvun $7^{7^{7^7}}-7^{7^7}$ kaksi viimeistä numeroa. (1996)

171. Herra X ja neiti C menevät kahvilaan. X tilaa lasillisen maitoa ja C pienen kupin kahvia. X antaa lasistaan yhden täyden teelusikallisen C:lle. C sekoittaa juomansa hyvin ja nostaa sitten täyden teelusikallisen kupistaan X:n lasiin. Onko X:llä tämän jälkeen enemmän, yhtä paljon vai vähemmän kahvia lasissaan kuin C:llä maitoa kupissaan? (1995)

172. Kuutio on koottu n^3:sta identtisestä pikkukuutiosta. Iso kuutio maalataan. Kuinka moni pikkukuutioista on tämän jälkeen sellainen, että tasan 3, 2, 1 tai 0 sivua on maalattu? (1995)

173. Todista, että on mahdotonta kytkeä 77 puhelinta toisiinsa niin, että jokainen on kytketty tasan 15:een muuhun. (1995)

174. Viidessä astiassa on kussakin 100 kuulaa. Eräissä astioissa kuulat painavat 10 g, toisissa taas 11 g. Käytettävissä on gramma-asteikolla varustettu riittävän suuria painoja punnitseva vaaka. Mikä on pienin määrä punnituksia, jolla voidaan selvittää, missä astioissa on 10 g:n ja missä 11 g:n kuulia? (1995)

175. Ampuja ampui viidesti 10-renkaiseen maalitauluun ja sai tulokseksi 40. Yksikään laukaus ei ollut huonompi kuin 7. Monellako erilaisella laukaussarjalla (järjestys otetaan huomioon!) tällainen tulos voidaan saavuttaa? (1995)

176. n oppilasta seisoo jonossa. Oppilaat numeroidaan luvuilla 1, 2, 3, ..., n sen mukaan, monentenako he seisovat jonossa. Jonon järjestystä voidaan muuttaa sellaisella paikanvaihto-operaatiolla, jossa jokainen oppilas joko vaihtaa paikkaa jonkun toisen kanssa tai jää paikoilleen. Selvitä, miten oppilaat saadaan jonoon järjestyksessä n, 1, 2, ..., $n-1$ tekemällä kaksi edellä kuvatun kaltaista paikanvaihto-operaatiota.

177. Tarkastellaan viittä tason eri pistettä, joista mitkään kolme eivät ole samalla suoralla. Jokaiset kaksi näistä pisteistä yhdistetään joko punaisella tai sinisellä janalla niin, että mitkään kolme janaa eivät muodosta samanväristä kolmiota. Todista, että jokaisesta pisteestä lähtee tasan kaksi punaista ja tasan kaksi sinistä janaa ja että sekä siniset että punaiset janat muodostavat sulkeutuvan murtoviivan, joka kulkee kaikkien viiden pisteen kautta. Monellako eri tavalla tehtävän mukainen väritys on mahdollista tehdä?

178. Todista, että

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

(1991)

179. Olkoon S_n erään geometrisen jonon $(a, aq, aq^2, \dots)$ n:n ensimmäisen termin summa ja T_n jonon käänteisluvuista muodostuvan jonon n:n ensimmäisen termin summa. Määritä (ensimmäisen) jonon n:n ensimmäisen termin tulo P_n (S_n:n ja T_n:n avulla). (1991)

180. Jonon 49, 4489, 444889 termit saadaan lisäämällä jonon edelliseen lukuun keskimmäisiksi numeroiksi 48. Osoita, että jonon kaikki luvut ovat kokonaislukujen neliöitä eli toisia potensseja. (1991)

181. Ratkaise (reaalilukujen joukossa) yhtälöryhmä

$$\begin{aligned} x + y &= 1, \\ x^4 + y^4 &= 7. \end{aligned}$$

(1991)

182. Määritä kaikki reaaliluvut x ja y, joille pätee

$$x^2 + 4x\cos(xy) + 4 = 0.$$

(1991)

183. Osoita, että

$$(n!)^2 > n^n$$

kaikilla $n > 2$. (1991)

184. Osoita, että jos luvut x_i ovat positiivisia ja

$$x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = 1,$$

niin

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geq n.$$

(1991)

185. Laske, kuinka monella tavalla 52 kortin pakka voidaan jakaa kahteen yhtä suureen osaan niin, että kummassakin osassa on kaksi ässää. (1991)

186. Tasossa on n keskenään yhdensuuntaisen suoran parvi ja toinen m:n keskenään yhdensuuntaisen suoran parvi, jonka suorat leikkaavat edellisen parven suorat. Montako suunnikasta nämä leikkaavat suoraparvet synnyttävät? (1991)

187. Luvut $p_1, p_2, \ldots p_n$ ovat keskenään eri suuria alkulukuja ja $q = p_1 p_2 \cdot \ldots \cdot p_n$. Montako tekijää luvulla q on? (1991)

188. Kolmion sisäpisteen P kautta piirretyt kolmion sivujen suuntaiset suorat jakavat kolmion kuuteen osaan, joista kolme on kolmioita. Näiden kolmioiden alat ovat T_1, T_2 ja T_3. Määritä kolmion ala T. (1991)

189. Terävän kulman sisään on piirretty ympyröitä, joista jokainen sivuaa kulman kylkiä ja kahta muuta ympyräparveen kuuluvaa ympyrää. Osoita, että ympyröiden säteet muodostavat geometrisen jonon. (1991)

190. Osoita, että lauseke

$$\frac{\sin x + \tan x}{\cos x + \cot x}$$

on positiivinen, aina kun se on määritelty. (1991)

191. Osoita, että

$$\cos \sin x > \sin \cos x$$

kaikilla x, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. (1991)

192. Olkoon k positiivinen kokonaisluku. Sanomme, että luvuilla 1, 2, $\ldots k$ määritelty funktio f, joka saa vain arvoja 1 ja 2, on *pieniarvoinen k-funktio.* Merkitään $S(k)$:lla sellaisten pieniarvoisten k-funktioiden määrää, joille pätee

$$f(1) + f(2) + \ldots f(k) = 1000.$$

Osoita, että $S(500) + S(501) + \ldots S(1000) > 10^{150}$. (1990)

193. Ympyröiden C_1 ja C_2 keskipisteet ovat Z_1 ja Z_2. Ympyrät leikkaavat pisteissä P ja Q. Piste R on ympyrällä C_1 ja piste Q ympyrällä C_2, ja kulmat PZ_1R ja PZ_2S ovat molemmat 15° (mitattuina myötäpäivään P:stä alkaen). Osoita, että Q, R ja S ovat samalla suoralla. (1990)

194. Määritä kaikki reaaliluvut x, joille pätee

$$\sqrt{\frac{x-1986}{15}} + \sqrt{\frac{x-1987}{14}} + \sqrt{\frac{x-1988}{13}} = \sqrt{\frac{x-15}{1986}} + \sqrt{\frac{x-14}{1987}} + \sqrt{\frac{x-13}{1988}}.$$

(1990)

195. Olkoon n kokonaisluku ja p alkuluku, joka ei ole n:n tekijä. Eräässä kokouksessa, jossa oli n osallistujaa, päätettiin muodostaa mahdollisimman monta tasan p-jäsenistä työryhmää, joista missään kahdessa ei ole tasmälleen samoja jäseniä. Kukin työryhmä valitsi keskuudestaan puheenjohtajan. Osoita, että kaikki kokouksen osanottajat eivät olleet yhtä monen työryhmän puheenjohtajina. (1990)

196. Todista, että jos n on kokonaisluku, niin $n^4 - 20n^2 + 4$ ei ole alkuluku. (1991)

197. Määritä kaikki reaalilukuneliköt $(x,\, y,\, z,\, t)$ joille on voimassa

$$\begin{aligned} x + y + z &= t, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} &= \frac{1}{t}. \end{aligned}$$

(1991)

198. Määritä kaikki positiiviset kokonaisluvut m, n, joille pätee $|3^m - 2^n| = 1$. (1991)

199. Osoita, että luvut

$$10001, \quad 100010001, \quad 1000100010001, \ldots$$

ovat kaikki yhdistettyjä lukuja. (1991)

200. Etsi sellainen polynomi $P(x)$, että polynomi $P(x)$ on tasan jaollinen polynomilla $x^2 + 1$ ja polynomi $P(x) + 1$ on tasan jaollinen polynomilla $x^3 + x^2 + 1$. (1991)

201. Osoita, että jos n on ei-negatiivinen kokonaisluku, niin murtolukua

$$\frac{n^3 + 2n}{n^4 + 3n^2 + 1}$$

ei voi supistaa. (1991)

202. Määritä kaikki polynomit $P(x)$, joille pätee $P(x^2 + 1) = P(x)^2 + 1$ ja $P(0) = 0$. (1991)

203. Suunnikkaan sivut yksinä sivuina piirretäään suunnikkaan ulkopuolelle neliöt. Osoita, että näiden neliöiden keskipisteet ovat neliön kärjet. (1991)

204. Todista, että konveksin nelikulmion vastakkaisten sivujen keskipisteitä yhdistävien janojen keskipisteet ja nelikulmion lävistäjien keskipisteet ovat samalla suoralla. (1991)

205. Kolmion sivut ovat a, b ja c. Kolmion ympäri piirretyn ympyrän keskipisteen etäisyydet kolmion sivuista ovat (edellä mainitussa järjestyksessä) m, n ja p. Osoita, ett

$$\frac{m}{a} + \frac{n}{b} + \frac{p}{c} = \frac{mnp}{abc}.$$

(1991)

206. Olkoon R kolmion ympäri piirretyn ympyrän säde ja T kolmion ala. Osoita, että

$$T < \frac{1}{2}\pi R^2.$$

(1991)

207. Kolmion ABC sisään piirretyn ja ympäri piirretyn ympyrän keskipisteet ovat samat. Osoita, että kolmio ABC on tasasivuinen. (1991)

208. Kolmio ABC on tasakylkinen. Olkoon R kolmion ympäri ja r kolmion sisään piirretyn ympyrän säde ja d näiden ympyröiden keskipisteiden etäisyys toisistaan. Osoita, että

$$d = \sqrt{R(R-2r)}.$$

(1991)

209. Esitä luku 30 neljän luonnollisen luvun $a \le b \le c \le d$ summana niin, että tulo $abcd$ on mahdollisimman suuri. (1991)

210. Osoita: jos x ja y ovat ei-negatiivisia lukuja, joille pätee $x^2 + y^2 = 4$, niin

$$\frac{xy}{x+y+2} \le \sqrt{2} - 1. \tag{1}$$

Määritä ne lukuparit (x, y), joille epäyhtälössä (1) pätee yhtäsuuruus. (1991)

211. Osoita: jos yhtälöllä $x^2 - ax + a = 0$ on reaaliset juuret s ja t, niin $s^2 + t^2 \ge 2(s+t)$. (1991)

212. Kolmion ABC *sivuympyrät* ovat ympyröitä, jotka sivuavat yhtä kolmion sivua ja kahden muun jatkeita. Olkoon ABC:n ympäri piirretyn ympyrän säde R. Todista, että sivuympyröiden säteet eivät ole suurempia kuin $4R$. (1991)

213. Laske luvun $19^{88} - 1$ kaikkien muotoa $2^m 3^n$, $m > 0$, $n > 0$ olevien tekijöiden summa. (1991)

214. Kolmion ABC kulmien A ja B puolittajat leikkaavat sivut BC ja CA pisteissä A' ja B'. Todista, että suora $B'C'$ leikkaa kolmion sisään piirretyn ympyrän. (1991)

215. Määritä kaikki polynomit

$$P(x) = x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0,$$

joilla on seuraava ominaisuus: jos t on polynomin P (reaalinen tai kompleksinen) nollakohta, niin myös t^{-1} ja $1 - t$ ovat P:n nollakohtia. (1991)

216. Määritä kaikki ei-negatiivisten kokonaislukujen joukossa $\mathbb{N}_0$ määritellyt funktiot f, joiden arvot ovat ei-negatiivisia kokonaislukuja, ja joille pätee

$$f(f(n)) + f(n) = 2n + 6$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}_0$. (1991)

217. Todista, että kaikilla $x \geq 1$ ja $n \geq 1$ pätee

$$(1+x)^n \geq 1 + \frac{n^2}{4}.$$

(1993)

218. Todista (mielellään muuten kuin differentiaalilaskentaa käyttämällä), että

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n < \frac{2+x}{2-x}$$

kaikilla luonnollisilla luvuilla n ja kaikilla reaaliluvuilla x, $0 < x < 2$. (1993)

219. Etsi kaikki luonnollisten lukujen m, n parit, joilla on seuraava ominaisuus: jos joukosta $\{m, n, 41\}$ valitaan mielivaltaiset kaksi tai kolme lukua, niin valittujen lukujen neliöiden summa on kokonaisluvun neliö. (1993)

220. Kolmion sivujen ja yhden korkeusjanan mittaluvut ovat kokonaislukuja ja mainittu korkeusjana on lyhempi kuin kolmion lyhin sivu. Osoita, että ehdon täyttäviä kolmioita on (olennaisesti) vain yksi. (1993)

221. Olkoon p pariton alkuluku, joka ei ole 5. Osoita, että lukujen

$$1, \quad 11, \quad 111, \ldots, \underbrace{111\ldots1}_{p \text{ kpl.}}$$

joukossa on ainakin yksi p:llä jaollinen. (1993)

222. Kokouksen 814 osanottajaa tulisi viedä retkelle mahdollisimman vähissä linja-autoissa. Käytettävissä on autoja, joihin mahtuu 20, 36, 42 tai 48 matkustajaa. Autoja, joihin mahtuu 36 matkustajaa tulee käyttää kaksi kertaa niin monta kuin autoja, joihin mahtuu 42 matkustajaa. Yksikään paikka ei saa jäädä tyhjäksi. Millaiset autot ja kuinka monta kutakin lajia tulisi varata? (1993)

223. Olkoon n luonnollinen luku. Osoita, että $2^{2n} + 24n - 10$ on jaollinen 18:lla. (1993)

224. Luvut a, b, c ja d ovat luvut 4, 8, 12 ja 16 jossakin järjestyksessä. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x+y+z=a \\ x+y-z=b \\ x-y+z=c \\ x-y-z=d. \end{cases}$$

(1993)

225. Avaruudessa on neljä pistettä P_1, P_2, P_3 ja P_4, jotka eivät ole samassa tasossa. Selvitä, kuinka monella avaruuden tasolla T on se ominaisuus, että kaikki neljä pistettä P_j ovat yhtä etäällä T:stä. (1993)

226. a, b ja c ovat erään kolmion sivut. Osoita, että

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}<2.$$

(1993)

227. Kaikki lukua 1993 pienemmät positiiviset kokonaisluvut kirjoitetaan peräkkäin jossakin järjestyksessä. Näin syntyy erään (suuren) positiivisen kokonaisluvun N kymmenjärjestelmäesitys. Osoita, että N ei ole minkään kokonaisluvun kolmas potenssi eli kuutio. (1993)

228. Kahdella nelikulmiolla on yhtä pitkät lävistäjät ja lävistäjien välinen kulma on sama. Osoita, että nelikulmioiden pinta-alat ovat samat. (1994)

229. Kolmio ABC ei ole tasakylkinen. Todista, että sen mielivaltaisesta kärjestä piirretty kulmanpuolittaja on samasta kärjestä piirrettyjen korkeusjanan ja keskijanan välissä (ts. kulmanpuolittaja leikkaa vastaisen sivun keskijanan ja korkeusjanan kantapisteiden välissä). (1994)

230. Suorakulmaisessa kolmiossa ABC on $AC=3AB$, ja pisteet D ja E jakavat kateetin AC kolmeen yhtä suureen osaan. Todista, että $\angle ADB+\angle AEB+\angle ACB=90^\circ$. (1994)

231. Kolmion sivut $a<b<c$ muodostavat aritmeettisen jonon. Kolmion ympäri ja sisään piirrettyjen ympyröiden säteet ovat R ja r. Todista, että $ac=6rR$. (1994)

232. Ympyrän kehä jaetaan neljäksi mielivaltaiseksi kaareksi, ja kaarien keskipisteet yhdistetään toisiinsa janoilla. Osoita, että näin syntyneistä janoista kaksi on toisiaan vastaan kohtisuorassa. (1994)

233. Pisteet A ja B ovat terävän kulman BOC samalla kyljellä. Määritä piste C toiselta kyljeltä niin, että $\angle ACB$ on mahdollisimman suuri. (1994)

234. Terävän kulman AOB aukeamassa olevan pisteen P kautta piirretään suora, joka erottaa kulman kärjestä alaltaan pienimmän kolmion. Tämä suora leikkaa kulman kyljet pisteissä D ja E. Osoita, että $DP = PE$. (1994)

235. Määritä kaikki positiiviset kokonaislukuparit (m, n), joille polynomi $(1 + x^n + x^{2n} + \ldots + x^{mn}$ on jaollinen polynomilla $(1 + x + x^2 + \ldots + x^m)$. (1994)

236. Merkitään symbolilla $T(ABC)$ kolmion ABC alaa, jos pisteet A, B ja C ovat tässä järjestyksessä kierrettäessä kolmion ympäri vastapäivään ja kolmion ABC alan vastalukua, jos A, B, C ovat tässä järjestyksessä myötäpäivään. Oletamme, että ABC ja $A'B'C'$ ovat saman tason kolmioita ja AA', BB', CC' keskenään yhdensuuntaisia. Todista, että

$$\begin{gathered}3(T(ABC) + T(A'B'C'))\\ = T(AB'C') + T(BC'A') + T(CA'B') + T(A'BC) + T(B'CA) + T(C'AB).\end{gathered}$$

(1994)

237. Osoita, että jos a ja b ovat kaksi yhtälön $x^4 + x^3 - 1 = 0$ juurta, niin ab on yhtälön $x^6 + x^4 + x^3 - x^2 - 1 = 0$ juuri. (1994)

238. Nelikulmio $ABCD$ ei ole tasossa. Osoita, että jos nelikulmion vastakkaiset sivut ovat keskenään yhtä pitkiä, niin nelikulmion lävistäjien keskipisteet yhdistävä suora on kohtisuorassa lävistäjiä vastaan, ja jos nelikulmion lävistäjien keskipisteet yhdistävä suora on kohtisuorassa lävistäjiä vastaan, niin nelikulmion vastakkaiset sivut ovat keskenään yhtä pitkiä. (1994)

239. Olkoon $0 < p < q$ ja olkoot a, b, c, d ja e välin $[p, q]$ lukuja. Osoita, että

$$(a + b + c + d + e)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{b} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e}\right) \le 25 + 6\left(\sqrt{\frac{p}{q}} - \sqrt{\frac{q}{p}}\right)^2.$$

(1994)

240. Kolme r-säteistä ympyrää kulkee saman pisteen P kautta. Ympyröiden toiset leikkauspisteet ovat A, B ja C. Osoita, että kolmion ABC ympäri piirretyn ympyrän säde on r. (1993)

241. Luvut $1, 2, \ldots, n^2$ sijoitetaan neliönmuotoisen $n \times n$ ruudukon ruutuihin niin, että jokaisessa vaaka- ja jokaisessa pystyrivissä olevat luvut muodostavat aritmeettisen jonon. Monellako eri tavalla luvut voidaan sijoittaa? (1994)

242. Luvut a, b ja c ovat positiivisia, $a+b+c \le 1$ ja $a \ge b \ge c$. Todista, että $a^2+3b^2+5c^2 \le 1$. (1994)

243. Ympyröiden C_1 ja C_2 keskipisteet ovat O_1 ja O_2. Ympyrät leikkaavat toisensa pisteissä A ja B. Olkoon P jokin C_1:n ja Q jokin C_2:n kehän piste ja olkoon $\angle APB + \angle AQB = 90°$. Todista, että kolmiot O_1AO_2 ja O_1BO_2 ovat suorakulmaisia. (1994)

244. Määritä kaikki parit (x, y), missä x ja y ovat positiivisia kokonaislukuja ja toteuttavat ehdot (i) $x \leq y$, (ii) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{1992}$. (1994)

245. Olkoot a, b ja c parittomia positiivisia kokonaislukuja. Todista, että yhtälöllä $ax^2 + bx + c = 0$ ei ole rationaalilukuratkaisuja. (1994)

246. Määritä pienin positiivinen kokonaisluku n, jolla on seuraava ominaisuus. Jos valitaan mitkä tahansa n kokonaislukua, niin niiden joukossa on kaksi, joiden summa tai erotus on jaollinen 1994:llä. (1994)

247. Kuusi pistettä A, B, C, D, E ja F valitaan umpimähkään ja toisistaan riippumatta ympyrän kehältä. Kuinka todennäköistä on, että kolmioilla ABC ja DEF ei ole yhteisiä pisteitä? (1994)

248. Olkoon $2a^2 < 5b$. Todista, että yhtälön

$$x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

kaikki juuret eivät voi olla reaalisia. (1994)

249. Tarkastellaan äärellistä kokoelmaa suoran osajoukkoja. Jokainen kokoelmaan kuuluva joukko on kahden suljetun välin yhdiste. Lisäksi jokaisella kolmella kokoelmaan kuuluvalla joukolla on yhteinen piste. Todista, että on olemassa piste, joka kuuluu ainakin puoleen kokoelman joukoista. (1994)

250. On annettu kuusi janaa S_1, S_2, $\ldots$, S_6; janat ovat järjestyksessä yhtä pitkät kuin tetraedrin $ABCD$ särmät AB, AC, AD, BC, BD ja CD. Selvitä, miten voidaan harpin ja viivoittimen avulla konstruoida jana, joka on yhtä pitkä kuin $ABCD$:n kärjestä A piirretty korkeusjana. (1994)

251. Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Tarkastellaan lukusuoran avointa väliä I, jonka pituus on $\frac{1}{n}$. Osoita, että välillä I on enintään $\frac{n+1}{2}$ supistetussa muodossa olevaa murtolukua $\frac{p}{q}$, $1 \leq q \leq n$. (1994)

252. Olkoon $ABCD$ konveksi nelikulmio. Olkoon g suurin ja h pienin janojen AB, AC, AD, BC, BD ja CD pituuksista. Todista, että

$$h \leq \frac{1}{\sqrt{2}}g.$$

(1994)

253. Olkoon M_n lukujen 1, 2, 3, ..., n pienin yhteinen monikerta (siis esim. $M_1 = 1$, $M_2 = 2$, $M_3 = 6$, $M_4 = 12$, $M_5 = 60$, $M_6 = 60$). Millä n:n arvoilla pätee $M_n = M_{n-1}$? (1994)

254. Olkoot A, B ja C kolme tason pistettä ja X, Y ja Z janojen AB, BC ja AC keskipisteet. Olkoon vielä P sellainen suoran BC piste, että $\angle CPZ = \angle YXZ$. Todista, että AP ja BC ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. (1994)

255. Todista, että on olemassa vain yksi nollasta eroavien reaalilukujen joukossa määritelty funktio f, jolle on voimassa

(a) $f(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right)$ kaikilla $x \neq 0$, ja

(b) $f(x) + f(y) = 1 + f(x+y)$ kaikilla $x \neq 0$, $y \neq 0$, joille $x \neq -y$. (1994)

256. Olkoot P_1, P_2, ..., P_n tason eri pisteitä, ja olkoon jokaisen kolmion $P_iP_jP_k$ $(i \neq j \neq k \neq i)$ ala enintään 1. Todista, että on olemassa kolmio, jonka ala on enintään 4 ja jonka sisällä tai sivuilla kaikki pisteet P_i ovat. (1994)

257. Suora ℓ sivuaa ympyrää C pisteessä A. Eri puolilla A:ta olevien suoran ℓ pisteiden B ja C kautta piirretyt C:n tangentit leikkaavat toisensa pisteessä P. Selvitä, miten P liikkuu, kun B ja C liikkuvat pitkin ℓ:ää niin, että $|AB| \cdot |AC|$ on vakio. (1994)

258. Olkoot a_0, a_1, ..., a_{n-1} reaalilukuja. Polynomille

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$$

pätee $f(1) = |f(0)|$. Lisäksi polynomin kaikki nollakohdat ovat reaalisia ja välillä $(0, 1)$. Osoita, että nollakohtien tulo on enintään $\frac{1}{2^n}$. (1994)

259. Tarkastellaan neliönmuotoista 9×9-ruudukkoa. Ruudukon 81:stä ruudusta n väritetään mustaksi. Mikä on suurin n, jolle pätee: tehdään n:n ruudun väritys miten tahansa, niin aina jää ainakin yksi kokonaan värittämätön 1×4- tai 4×1-suorakaide? (1994)

260. Keskenään kohtisuorat suorat leikkaavat neliön $ABCD$ sivut AB, BC, CD ja DA pisteissä E, F, G ja H. Osoita, että $|EG| = |FH|$. (1995)

261. Lausu kolmion keskijanan pituus sen sivujen pituuksien avulla. (1995)

262. Lausu kolmion sivun pituus sen keskijanojen pituuksien avulla. (1995)

263. Lausu kolmion korkeusjanan pituus kolmion sivujen pituuksien avulla. (1995)

264. Osoita, että teräväkulmaisen kolmion ortokeskipiste on kolmion korkeusjanojen kantapisteiden muodostaman kolmion (*ortokolmion*) sisään piirretyn ympyrän keskipiste. (1995)

265. Lausu kolmion kulman puolittajan pituus kolmion sivujen avulla. (1995)

266. Puolisuunnikkaan kannat ovat a ja b. Laske puolisuunnikkaan lävistäjien keskipisteiden etäisyys toisistaan. (1995)

267. Osoita, että mielivaltaisessa kolmiossa ABC on ortokeskuksen etäisyys kärjestä B kaksi kertaa niin suuri kuin kolmion ympäri piirretyn ympyrän keskipisteen etäisyys suorasta AC. (1995)

268. Viisi janaa, joiden pituudet ovat a, b, c, d ja e ovat sellaisia, että mitkä tahansa kolme niistä voivat olla kolmion sivuina. Osoita, että näin syntyvistä kolmioista ainakin yksi on teräväkulmainen.

269. Olkoon $n \geq 3$. Etsi kaikki jonot $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, joille pätee $x_1 - x_2 = x_3$, $x_2 - x_3 = x_4$, $x_{n-1} - x_n = x_1$, $x_n - x_1 = x_2$.

270. Todista: jos sarjasta $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$ poistetaan kaikki ne termit, joiden nimittäjän kymmenjärjestelmäesityksessä esiintyy numero 9, niin jäljelle jäänyt sarja on suppeneva.

271. Todista: jos a ja x ovat luonnollisia lukuja ja $a \leq x$, niin $2^a \cdot a! \leq \frac{(x+a)!}{(x-a)!} \leq (x^2+x)^a$.

272. Polynomi

$$(1 - 3x + 3x^2)^{743}(1 + 3x - 3x^2)^{744}$$

kirjoitetaan muotoon $a_n x^x + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$. Laske kertoimien summa $\sum_{k=0}^{n} a_k$. (1995)

273. Polynomit

$$(1 + x^2 - x^3)^{1000} \quad \text{ja} \quad (1 - x^2 + x^3)^{1000}$$

kirjoitetaan muotoon $a_n x^n + \cdots + a_0$. Kumman polynomin esityksessä termin x^{40} kerroin on suurempi? (1995)

274. Määritä jakojäännökset, kun polynomi

$$p(x) = x + x^3 + x^9 + x^{27} + x^{81} + x^{243}$$

jaetaan a) polynomilla $x + 1$, b) polynomilla $x^2 - 1$. (1995)

275. Tiedämme, että jaettaessa polynomi p $x - 1$:llä saadaan jakojäännökseksi 2 ja jaettaessa p $x - 2$:lla saadaan jakojäännökseksi 1. Mikä jakojäännös saadaan, kun p jaetaan polynomilla $(x - 1)(x - 2)$? (1995)

276. Etsi polynomit p, joille pätee

$$xp(x-1) = (x-13)p(x)$$

kaikilla x. (1995)

277. Olkoot $p \geq 1$ ja $q \geq 1$ luonnollisia lukuja. Osota, että kahden muuttujan x ja y polynomia $x^p y^q + 1$ ei voi kirjoittaa x:n polynomin ja y:n polynomin tuloksi. (1995)

278. Toisen asteen polynomi p on sellainen, että yhtälöllä $p(x) = x$ ei ole reaalijuuria. Osoita, että yhtälöllä $p(p(x)) = x$ ei myöskään ole reaalijuuria. (1995)

279. Todista, että jokaisen vähintään astetta 1 olevan kokonaiskertoimisen polynomin kokonaisluvuilla saamien arvojen joukossa on muita kuin alkulukuja. (1995)

280. Osoita: jos

$$x + \frac{1}{x} = 2\cos\alpha,$$

niin

$$x^n + \frac{1}{x^n} = 2\cos n\alpha.$$

(1995)

281. Ratkaise yhtälö

$$\sqrt{a - \sqrt{a+x}} = x.$$

(1995)

282. Ratkaise yhtälö

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1+ \ddots \, 1 + \cfrac{1}{x}}}} = x.$$

(1995)

283. Ratkaise yhtälö

$$\sqrt{x + 2\sqrt{x + 2\sqrt{x + \ldots + 2\sqrt{x + 2\sqrt{3x}}}}} = x,$$

missä on kaikkiaan n neliöjuurimerkkiä. (1995)

284. Osoita, että
$$(a+b+c)^{333}-a^{333}-b^{333}-c^{333}$$
on jaollinen lausekkeella
$$(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3.$$
(1995)

285. Jaa tekijöihin
$$x^{10}+x^5+1.$$
(1995)

286. Ratkaise yhtälö
$$x^3-\lfloor x\rfloor=3,$$
missä $\lfloor x\rfloor$ on suurin kokonaisluku, joka on $\leq x$. (1995)

287. Ratkaise yhtälöryhmä
$$\begin{aligned}x^3+y^3&=1\\x^4+y^4&=1\end{aligned}$$
(1995)

288. Selvitä, onko yhtälöparilla
$$\begin{aligned}x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{1985}^2&=y^3\\x_1^3+x_2^3+\ldots+x_{1985}^3&=z^2\end{aligned}$$
sellaisia kokonaislukuratkaisuja, joissa x_1, x_2, ..., x_{1985} ovat kaikki keskenään eri suuria. (USAMO 1985; 1995)

289. Määritä yhtälön
$$x^4-(2\cdot 10^{10}+1)x^2-x+10^{20}+10^{10}-1=0$$
kaikki reaalijuuret neljän desimaalin tarkkuudella. (USAMO 1985; 1995)

290. Olkoot A, B, C ja D neljä avaruuden pistettä. Janoista AB, AC, AD, BC, BD, CD enintään yksi on pitempi kuin 1. Mikä on janojen pituuksien summan suurin mahdollinen arvo? (USAMO 1985; 1995)

291. Seurueessa on n henkilöä. Todista, että seurueessa on kaksi henkilöä, A ja B siten, että loppujen $n-2$:n joukossa on joko $\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-1$ henkilöä, jotka ovat sekä A:n että B:n tuttavia tai $\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-1$ henkilöä, jotka eivät ole A:n eivätkä B:n tuttavia. Oletetaan, että tuttavuus on molemminpuolista. $\lfloor x\rfloor$ on suurin kokonaisluku, joka on $\leq x$. (USAMO 1985; 1995)

292. Olkoon $a_1, a_2, a_3, \ldots,$ ei-vähenevä jono positiivisia kokonaislukuja. Jokaisella $m \geq 1$ asetetaan $b_m = \{n \mid a_n \geq m\}$. b_m on siis pienin sellainen n, jolle $a_n \geq m$. Oletamme, että $a_{19} = 85$. Määritä summan $a_1 + a_2 + \ldots + a_{19} + b_1 + b_2 + \ldots + b_{85}$ suurin mahdollinen arvo. (USAMO 1985; 1995)

293. Olkoon P kokonaislukukertoiminen polynomi, jonka aste on 1995. Olkoon $Q(x) = P(x)^2 - 9$. Osoita, että polynomin Q kokonaislukunollakohtien lukumäärä on pienempi kuin 2000. (1995)

294. Konveksin nelikulmion $ABCD$ lävistäjien leikkauspiste on E. Kolmioiden ABE, CDE ja nelikulmion $ABCD$ pinta-alat ovat F_1, F_2 ja F. Todista, että $\sqrt{F_1} + \sqrt{F_2} \leq \sqrt{F}$. Milloin epäyhtälössä pätee yhtäsuuruusmerkki? (1995)

295. Määritä kaikki positiiviset kokonaisluvut x, y, z, joille

$$x^{y^z} \cdot y^{z^x} \cdot z^{x^y} = 1995^{1995} xyz.$$

(1995)

296. Olkoon $n > 1$ kokonaisluku. Olkoon S_n kaikkien permutaatioiden $p : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ joukko. Jokaiselle $p \in S_n$ merkitään

$$F(p) = \sum_{k=1}^{n} |k - p(k)|.$$

Laske

$$M_n = \frac{1}{n!} \sum_{p \in S_n} F(p).$$

(1995)

297. Todista, että kaikille positiivisille reaaliluvuille x, y, z pätee

$$\frac{xyz(x + y + z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})}{(x^2 + y^2 + z^2)(xy + yz + zx)} \leq \frac{3 + \sqrt{3}}{9}.$$

Todista, että yhtäsuuruus on voimassa vain, kun $x = y = z$. (1995)

298. Kolmion kaikkien kolmen sivun pituus on ≥ 1. Kolmio sisältyy kokonaan yksikköneliöön (pistejoukkona kolmion sisä- ja reunapisteet ovat osajoukko neliön sisä- ja reunapisteiden joukosta). Todista, että neliön keskipiste on kolmion piste. (1995)

299. Todista, että koordinaattitasoon ei voi piirtää suljettua murtoviivaa, jonka jokaisen kärkipisteen koordinaatit olisivat rationaaliset, jokaisen sivun pituus yksi ja jossa olisi pariton määrä kärkiä. (1995)

300. Ympyrän Y_1 keskipiste on O. Ympyrän Y_2 halkaisija on ympyrän Y_1 säde OC. C:n kautta kulkeva suora leikkaa ympyrät Y_1 ja Y_2 myös pisteissä E ja D. Osoita, että CD ja DE ovat yhtä pitkät. (1995)

301. Ympyröiden Y_1 ja Y_2 keskipisteet ovat A ja B, ja ympyrät sivuavat toisiaan pisteessä T. Ympyröiden sellainen yhteinen tangentti, joka ei sivua ympyröitä pisteessä T, sivuaa Y_1:tä pisteessä P ja Y_2:ta pisteessä Q. Suora AB leikkaa Y_1:n pisteissä T ja R ja Y_2:n pisteissä T ja S. Olkoon X suorien RP ja SQ leikkauspiste. Osoita, että RX ja SX ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. (1995)

302. Ympyrät Y_1 ja Y_2 sivuavat toisiaan pisteessä A, ja ympyröiden yhteinen tangentti sivuaa Y_1:tä pisteessä B ja Y_2:ta pisteessä C. Suora BA leikkaa ympyrän Y_2 myös pisteessä D. Osoita, että CD on Y_2:n halkaisija. (1995)

303. Nelikulmio $ABCD$ on piirretty ympyrän sisään. Oletamme, että suorat AB ja DC leikkaavat toisensa pisteessä P ja suorat AD ja BC leikkaavat toisensa pisteessä Q. Oletamme, että $\angle APD = x$, $\angle AQB = 2x$ ja $\angle DAB = 3x$. Määritä x. (1995)

304. Ympyrän Y toisiaan vastaan kohtisuorien tangenttien AT ja BT sivuamispisteet ovat A ja B. Piste Q on suoralla AT, piste S suoralla BT ja R on ympyrällä Y siten, että $QRST$ on suorakulmio ja $QT = 6$ cm, $ST = 3$ cm. Määritä Y:n säde. (1995)

305. Toisiaan pisteessä T sivuavien ympyröiden Y_1 ja Y_2 säteet ovat 2 cm ja keskipisteet O ja P. Suora OP leikkaa Y_1:n pisteissä A ja T ja ympyrän Y_2 pisteissä T ja B. A:n kautta kulkeva Y_2:n tangentin sivuamispiste on C. AC ja Y_2:n pisteeseen B piirretty tangentti leikkaavat toisensa pisteessä D. Määritä janan BD pituus. (1995)

306. Teräväkulmaisen kolmion ABC ympäri piirretyn ympyrän keskipiste on P. Sivulle BC piirretyn korkeusjanan kantapiste on D. Todista, että kulman A puolittaja puolittaa myös kulman DAP. (1995)

307. $ABCD$ on jännenelikulmio, jonka sisään on piirretty ympyrä Y. Suorien AB, BC, CD ja DA ja ympyrän Y sivuamispisteet ovat P, Q, R ja S. Todista, että PR ja QS ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. (1995)

308. Kolmion ABC ympäri piirretyn ympyrän pisteisiin A, B ja C piirretyt tangentit synnyttävät kolmion DEF. Kolmion ABC ympäri piirretyn ympyrän säde on R. Todista, että kolmion DEF ala on $R^2(\tan A + \tan B + \tan C)$. (1995)

309. Kun viidestä luvusta a, b, c, d, e kaksi lasketaan yhteen, niin mahdollisia summia ovat 183, 186, 187, 190, 191, 192, 193, 194, 196 ja 200. Oletamme, että $a < b < c < d < e$. Määritä a. (1995)

310. Osoita, että parittoman kokonaisluvun toinen potenssi on aina $4q + 1$.(1995)

311. Määritä kaikki positiiviset kokonaisluvut n, joiden toinen potenssi on kahdella eroavien kokonaislukujen neliöiden erotus. (1995)

312. Osoita, että luku $mn(m^4 - n^4)$ on aina jaollinen 30:llä. (1995)

313. Osoita: kahden peräkkäisen parittoman alkuluvun summalla on aina vähintään kolme alkutekijää. (1995)

314. Määritä kaikki positiiviset kokonaisluvut m ja n, joille $m^4 + 4n^4$ on alkuluku. (1995)

315. Todista, että luku $\dfrac{x^5}{5} + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{7x}{15}$ on kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla x kokonaisluku. (1995)

316. Onko olemassa positiivisia kokonaislukuja x, y ja z, joille pätee $x^2 + y^2 + z^2 = (xy)^2$? (1995)

317. Millä p:n ja q:n arvoilla yhtälön $x^2 + px + q = 0$ ratkaisut ovat p ja q? (1995)

318. Tiedämme, että yhtälön $ax^2 + bx + c = 0$ ratkaisut ovat x_1 ja x_2. Lausu luvut

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} \quad \text{ja} \quad x_1^4 + x_1^2 x_2^2 + x_2^4$$

lukujen a, b ja c avulla. (1995)

319. Ratkaise yhtälö

$$x(x+2)(x+3)(x+5) = 8.$$

(1995)

320. Ratkaise yhtälö

$$\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2x-3} = \sqrt[3]{12(x-1)}.$$

(1995)

321. Ratkaise yhtälö

$$\sqrt{a - \sqrt{a+x}} = x.$$

(1995)

322. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x + y + z = 9 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 1 \\ xy + yz + zx = 27. \end{cases}$$

(1995)

323. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x+y+z=a \\ x^2+y^2+z^2=a^2 \\ x^3+y^3+z^3=a^3. \end{cases}$$

(1995)

324. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{xy}+\dfrac{xy}{x+y}=\dfrac{a^2+1}{a} \\ \dfrac{x-y}{xy}+\dfrac{xy}{x-y}=\dfrac{b^2+1}{b}. \end{cases}$$

(1995)

325. Määritä

$$\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{\ldots}}}}.$$

(1995)

326. Sievennä lauseke

$$\frac{1}{2+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}$$

muotoon, jonka nimittäjässä ei esiinny juurilausekkeita. (1995)

327. Osoita: jos $2x+4y=1$, niin

$$x^2+y^2 \geq \frac{1}{20}.$$

(1995)

328. Osoita, että kaikilla kokonaisluvuilla $n>1$ pätee

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}.$$

(1995)

329. Selvitä, milloin kolme lukua muodostaa (samassa järjestyksessä) sekä aritmeettisen että geometrisen jonon. (1995)

330. Luvut a_1, a_2, …, a_n muodostavat aritmeettisen jonon. Osoita, että

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}=\frac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}.$$

(1995)

331. Sievennä summa

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2+\ldots+\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)^2.$$

(1995)

332. Määritä a ja b niin, että polynomi $ax^{15}+bx^{14}+1$ tulee jaolliseksi polynomilla $(x-1)^2$. (1995)

333. Olkoon a reaaliluku. Ratkaise reaalilukujen joukossa yhtälö

$$\sqrt{x^2+4a^2\sqrt{x+a}}=x+2a.$$

(Itävalta 1982; 1996)

334. Olkoon D piste kolmion ABC sisällä. Olkoot A', B' ja C' pisteet, joissa suorat AD, BD ja CD leikkaavat kolmion sivut. Todista:

$$\frac{DA'}{AA'}+\frac{DB'}{BB'}+\frac{DC'}{CC'}=1.$$

(Itävalta 1982; 1996)

335. Olkoon P ainakin kaksinumeroisten alkulukujen joukko. Etsi suurin luku, joka on tekijänä kaikissa luvuissa p^2-1, $p\in P$. (Itävalta 1982; 1996)

336. Todista, että kaikille luonnollisille positiivisille kokonaisluvuille n on voimassa epäyhtälö

$$\frac{3}{2}\cdot\left(\sqrt[3]{(n+1)^2}-1\right)<1+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}<\frac{3}{2}\cdot\sqrt[3]{n^2}.$$

(Itävalta 1982; 1996)

337. Osoita, että luvut 1331, 1030301, 1003003001, …, $1\underbrace{00\ldots0}_{k\text{ nollaa}}3\underbrace{00\ldots0}_{k\text{ nollaa}}3\underbrace{00\ldots0}_{k\text{ nollaa}}1$ ovat kokonaislukujen kuutioita. (1996)

338. Osoita: jos m on kokonaisluku, niin

$$\frac{m}{3}+\frac{m^2}{2}+\frac{m^3}{6}$$

on kokonaisluku. (1996)

339. Osoita: jos luku on jaollinen 99:llä, niin sen numeroiden summa on ainakin 18. (1996)

340. Positiivisen kokonaisluvun x kaksi viimeistä numeroa ovat a ja b. Määritä kaikki parit (a, b), joille myös x^2 päättyy numeroihin a ja b (samassa järjestyksessä kuin x). (1996)

341. Osoita, että 1000:n mielivaltaisen peräkkäisen positiivisen kokonaisluvun summa ei voi olla alkuluku. (1996)

342. Jos p ja $q = p+2$ ovat molemmat alkulukuja, p:tä ja q:ta kutsutaan *alkulukukaksosiksi*. Todista, että jos p ja q ovat alkulukukasoset ja $p \geq 5$, niin $p+q$ on jaollinen 12:lla. (1996)

343. Etsi kaikki alkuluvut p, joille $2p+1$ on kokonaisluvun kuutio. (1996)

344. Selvitä, onko luku $21^{39}+39^{21}$ jaollinen luvulla 45. (1996)

345. Määritä positiiviset kokonaisluvut z, jotka voidaan kahdella eri tavalla kirjoittaa kahden kertoman summaksi $z = x! + y!$, $x \leq y$. (1996)

346. Määritä kaikki positiiviset kokonaisluvut x ja y, joille x^4+4y^4 on alkuluku. (1996)

347. Osoita: jos x, y ja z ovat kokonaislukuja, joille $x^2+y^2=z^2$, niin xyz on jaollinen 60:llä. (1996)

348. Olkoon $f(x) = \dfrac{9^x}{9^x+3}$. Laske summa

$$f\left(\frac{1}{1996}\right)+f\left(\frac{2}{1996}\right)+f\left(\frac{3}{1996}\right)+\ldots+f\left(\frac{1995}{1996}\right).$$

(Kanada 1995; 1996)

349. Olkoot a, b ja c positiivisia reaalilukuja. Osoita, että

$$a^a b^b c^c \geq (abc)^{(a+b+c)/3}.$$

(Kanada 1995; 1996)

350. Kutsutaan nelikulmiota, jonka vastakkaiset sivut eivät leikkaa toisiaan ja jonka yksi kulma on suurempi kuin 180° *bumerangiksi*. Olkoon C kupera s-sivuinen monikulmio. Oletamme, että C:n sisäpuoli koostuu q:sta nelikulmiosta, joiden sisäosat ovat erilliset. Oletetaan vielä, että näistä nelikulmioista b kappaletta on bumerangeja. Osoita, että $q \geq b + (s-2)/2$. (Kanada 1995; 1996)

351. Olkoon n kiinteä positiivinen kokonaisluku. Osoita, että jokaista positiivista kokonaislukua k kohden yhtälöllä

$$x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_n^3 = y^{3k+2}$$

on äärettömän monta eri ratkaisua $(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$, missä x_i:t ja y ovat positiivisia kokonaislukuja ja luvut x_i ovat eri lukuja. (Kanada 1995; 1996)

352. Olkoon u reaaliluku, $0 < u < 1$. Määritellään

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{jos } 0 \leq x \leq u, \\ 1 - \left(\sqrt{ux} + \sqrt{(1-u)(1-x)}\right)^2, & \text{jos } u \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Määritellään vielä lukujono (u_n) asettamalla $u_1 = f(1)$, $u_n = f(u_{n-1})$, kun $n > 1$. Osoita, että $u_k = 0$ jollain positiivisella luvulla k. (Kanada 1995; 1996)

353. Osoita, että jos $a^2+b^2+c^2 = 1$, niin $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \leq 3$. (Etelä-Afrikka 1994; 1997)

354. Osoita, että ei ole olemassa sellaisia positiivisia kokonaislukuja m ja n, joille luku $2(m^2+mn+n^2)$ olisi kokonaisluvun neliö. (Etelä-Afrikka 1994; 1997)

355. Piste E on kolmion ADC sivulla AC, piste O sivulla AD ja suora EO leikkaa suoran DC pisteessä B. Määritä $AO : OD$, jos $BD : DC = 4 : 7$ ja $AE : EC = 2 : 3$. (Etelä-Afrikka 1994; 1997)

356. Säännölliset m- ja n-kulmiot on piirretty saman ympyrän sisään. Monikulmioiden alojen suhde on $m : n$. Määritä m ja n. (Etelä-Afrikka 1994; 1997)

357. Määritä suurin parillinen luonnollinen luku, jota ei voi lausua kahden yhdistetyn parittoman luvun summana. (Etelä-Afrikka 1994; 1997)

358. Mikä on suurin positiivinen kokonaisluku, jota ei voida kirjoittaa muotoon $5x + 7y$, missä x ja y ovat positiivisia kokonaislukuja. (Etelä-Afrikka 1994; 1997)

359. Tasasivuisen kolmion ABC kärjen A kautta piirretään suora, joka leikkaa janan BC pisteessä Q ja kolmion ympäri piirretyn ympyrän kaaren BC pisteessä P. Osoita, että

$$\frac{1}{PB} + \frac{1}{PC} = \frac{1}{PQ}.$$

(Etelä-Afrikka 1994; 1997)

360. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} \sqrt{2x-1}+\sqrt{y+3}=3 \\ 2xy+6x-y=7. \end{cases}$$

(Etelä-Afrikka 1994; 1997)

361. Kuinka moni numeroista 0, 1, 2, ..., 9 muodostettu 5-numeroinen jono ei sisällä peräkkäisiä nollia? (Etelä-Afrikka 1994; 1997)

362. Osoita, että 4^n+2 on kaikilla luonnollisilla luvuilla n jaollinen 3:lla. (Etelä-Afrikka 1994; 1997)

363. Kellon osoittimet ovat viiden ja kuuden välillä suorassa kulmassa tasan kaksi kertaa. Montako minuuttia on näiden hetkien väliaika? (Etelä-Afrikka 1994; 1997)

364. Todista (laskemisen apuneuvoja käyttämättä), että $7^{\sqrt{5}} > 5^{\sqrt{7}}$. (Etelä-Afrikka 1994; 1997)

365. Määritä kaikki funktiot f, joille

$$f(x)f(y)-f(xy)=x+y$$

kaikilla reaaliluvuilla x, y. (Etelä-Afrikka 1994; 1997)

366. Todista, että minkä hyvänsä kuuden kokonaisluvun joukossa on kaksi, joiden summa tai erotus on jaollinen 9:llä. (Etelä-Afrikka 1994; 1997)

367. Kolmiossa ABC on $\angle A = 75^\circ$ ja korkeusjanalle CH pätee $AB = 2CH$. Määritä $\angle B$. (Etelä-Afrikka 1994; 1997)

368. Pisteet D ja E ovat kolmion ABC sivuilla CA ja AB, ja janat CE ja BD leikkaavat toisensa pisteessä F Kolmioiden BCF, CDF ja EBF alat ovat 10, 8 ja 5. Määritä nelikulmion $AEFD$ ala. (Etelä-Afrikka 1994; 1997)

369. Määritä kaikki kokonaisluvut m ja n, joille $m^3-n^3-6mn=8$. (Etelä-Afrikka 1994; 1997)

370. Kokonaisluvuista a, b ja c mikään ei ole 5:llä jaollinen. Osoita, että luvuista a^2-b^2, b^2-c^2 ja a^2-c^2 ainakin yksi on jaollinen 5:llä. (Etelä-Afrikka 1994; 1997)

371. Oletamme, että positiivisille luvuille a, b, c pätee $abc=1$. Osoita, että

$$\frac{a}{ab+a+1}+\frac{b}{bc+b+1}+\frac{c}{ca+c+1}=1.$$

(Etelä-Afrikka 1994; 1997)

372. Todista, että $\sin^2 20° + \sin^2 40° + \sin^2 80° = \frac{3}{2}$. (Etelä-Afrikka 1994; 1997)

373. Määritä kaikki kokonaisluvut m ja n, joille pätee $57m - 87n = 342$. (Etelä-Afrikka 1994; 1997)

374. Piste P on tasasivuisen kolmion ABC sisällä, ja P:n kohtisuorat projektiot kolmion sivuilla AB, BC ja CA ovat Q, R ja S. Tiedetään, että $PQ = 6$, $PR = 8$ ja $PS = 10$. Määritä kolmion ABC ala. (Etelä-Afrikka 1994; 1997)

375. Ratkaise yhtälö $x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x + 8 = 0$. (Etelä-Afrikka 1994; 1997)

376. Joukossa E on 21 lukua. Minkä hyvänsä 11:n E:n luvun summa on suurempi kuin muiden kymmenen luvun summa. Osoita, että E:n luvut ovat positiivisia. (Etelä-Afrikka 1994; 1997)

377. Erään kaupungin puhelinnumerot ovat kuusinumeroisia. Jokaisen puhelinliittymän numerossa on ainakin kaksi eri numeroa kuin missä hyvänsä muussa puhelinnumerossa. Montako liittymää kaupungissa voi enintään olla? (Etelä-Afrikka 1994; 1997)

378. Ympyrällä, neliöllä ja tasasivuisella kolmiolla on sama pinta-ala. Laske kuvioiden piirien pituuksien suhde. (1998)

379. Todista: nelikulmion sivujen keskipisteet ovat suunnikkaan kärjet. (1998)

380. Todista: suunnikkaan kulmien puolittajat muodostavat suorakaiteen, jonka lävistäjä on suunnikkaan eripituisten sivujen erotus. (1998)

381. Suunnikaan $ABCD$ sivu AB on jaettu n:ään yhtä pitkään osaan. Olkoon jakopisteistä lähinnä A:ta oleva P. Janat DP ja AC leikkaavat pisteessä Q. Osoita, että $AC = (n+1)AQ$. (1998)

382. AB on ympyrän halkaisija ja C ympyrän kehän piste. Pisteestä A C:n kautta kulkevalle ympyrän tangentille piirretty kohtisuora leikkaa tangentin pisteessä D. Osoita, että $\angle DAC = \angle CAB$. (1998)

383. Todista: suorakulmaisen kolmion kateetin keskipisteestä hypotenuusalle piirretty kohtisuora jakaa hypotenuusan osiin, joiden neliöiden erotus on sama kuin toisen kateetin neliö. (1998)

384. Suorakulmaisen kolmion ABC hypotenuusa AB on jaettu pisteillä D ja E kolmeen yhtä pitkään osaan. Todista, että kolmion CDE sivujen neliöiden summa on $\frac{2}{3}AB^2$. (1998)

385. Kolmion ABC pisin sivu on a. Kolmion sisältä valitaan mielivaltainen piste P. Suorat AP, BP ja CP leikkaavat kolmion vastakkaiset sivut pisteissä A', B' ja C'. Osoita, että $PA' + PB' + PC' < a$. (1998)

386. Tasasivuisen kolmion mielivaltainen piste P yhdistetään kolmeen kolmion eri sivuilla olevaan pisteeseen X, Y ja Z. Osoita, että $PX + PY + PZ$ ei ole pienempi kuin kolmion korkeus. (1998)

387. Todista: jos pisteet X, Y ja Z ovat kolmion ABC sivuilla BC, CA ja AB, niin AX, BY ja CZ kulkevat saman pisteen kautta jos ja vain jos

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1.$$

(Cevan lause.) (1998)

388. Kolmion ABC korkeusjanalta BN valitaan piste P. Suorat AP ja CP leikkaavat sivut BC ja AB pisteissä K ja M. Osoita, että $\angle MNB = \angle BNK$. (1998)

389. Todista: suorakulmaisessa kolmiossa on kateettien pituuksien summa sama kuin kolmion sisään ja ympäri pirrettyjen ympyröiden halkaisjoiden pituuksien summa. (1998)

390. Kolmion sisään ja ympäri piirrettyjen ympyröiden keskipisteiden välinen etäisyys olkoon d; sisään piirretyn ympyrän säde on r ja ympäri piirretyn ympyrän säde on R. Osoita, että $d^2 = R^2 - 2rR$. (1998)

391. Tasossa on n pistettä, joista mitkään kaksi eivät ole kauempana kuin yksikön päässä toisistaan. Osoita, että pisteet mahtuvat ympyrään, jonka säde on $\frac{1}{\sqrt{3}}$. (1998)

392. Kolmiossa ABC pätee $BC^2 = AC^2 + AC \cdot AB$. Osoita, että $\angle BAC = 2 \cdot \angle CBA$. (1998)

393. Avaruudessa sijaitsee umpinainen käyrä, jonka pituus on L. Osoita, että käyrä on kokonaan erään $\frac{L}{4}$-säteisen pallon sisällä. (1993)

394. [Funktionaaliyhtälöiden perustehtävä] Määritä jatkuvat funktiot f, joille $f(x+y) = f(x) + f(y)$ kaikilla x, $y \in \mathbb{R}$. [Jollei oleteta, että f on esim. jatkuva ainakin 0:ssa tai rajoitettu jollain välillä, ei ilmeinen ratkaisu ole ainoa mahdollinen.]

395. Määritä jatkuvat funktiot f, joille $f(x+y) = f(x)f(y)$ kaikilla x, $y \in \mathbb{R}$.

396. Funktiolle $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pätee

$$f(x+3) = \frac{f(x)}{3f(x) - 1}$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Osoita, että funktiolla f on jaksona 6 (a on f:n jakso, jos $f(x+a) = f(x)$ kaikilla x.) (Viro 1986; 1998)

397. Funktiolle f pätee $f(1) = 2$ ja $f(xy) = f(x)f(y) - f(x+y) + 1$. Määritä $f(k)$, missä k on mielivaltainen positiivinen kokonaisluku. (Viro 1981; 1998)

398. Positiivisten lukujen joukossa määritellylle kasvavalle reaalilukuarvoiselle funktiolle f pätee $f(x) > -\dfrac{1}{x}$ kaikilla $x > 0$ ja

$$f(x)f\left(f(x) + \frac{1}{x}\right) = 1$$

kaikilla $x > 0$. Määritä $f(1)$ ja määritä kaikki funktiot f, jotka toteuttavat tehtävän ehdot. (Viro 1988; 1998)

399. Ns. Ackermannin funktio f on määritelty kaikilla ei-negatiivisilla kokonaisluvuilla n, k siten, että

$$\begin{aligned} f(0, n) &= n + 1 \\ f(k, 0) &= f(k-1, 1) \\ f(k+1, n+1) &= f(k, f(k+1, n)). \end{aligned}$$

Määritä $f(2, 2)$. Määritä $f(4, 1998)$.

400. Määritä kaikki joukossa $\{x|x > 1\}$ määritellyt jatkuvat funktiot f, joille $f(xy = xf(y) + yf(x)$. (Itävalta 1986; 1998)

401. Jos I on väli, $g : I \to I$ jatkuva funktio, niin funktiot $g_1, g_2, \ldots,$ määritellään asettamalla $g_1 = g$ ja $g_k(x) = g_{k-1}(g(x))$. Osoita: jos jollain $m \geq 2$ pätee $g_m(x) = x$ kaikilla $x \in I$, niin $g_2(x) = x$ kaikilla $x \in I$. (Itävalta 1975; 1998)

402. Määritä funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jolle $f(x)f(y) - f(xy) = x + y$ kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$.

403. Määritä funktiot $f : \mathbb{N} \setminus \{0\} \times \mathbb{N} \setminus \{0\} \to \mathbb{N} \setminus \{0\}$, joille $f(x, x) = x$, $f(x, y) = f(y, x)$ ja $f(x, y) = f(x, x + y)$.

404. Määritä ei-negatiivisten lukujen joukossa määritellyt reaalilukuarvoiset funktiot f, joille $f(0) = 0$ ja $f(x^2 - y^2) = f(x)f(y)$, kun $x \neq y$. (Itävalta 1984; 1998)

405. Osoita, että on olemassa vain yksi kokonaislukujono $a_1, a_2, \ldots,$ jolle $a_1 = 1$, $a_2 > 1$ ja $a_{n+1}^3 + 1 = a_n a_{n+2}$. (Itävalta 1988; 1998)

406. Määritä funktiot $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, joille $f(f(n)) + f(n) = 2n + 6$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ($0 \in \mathbb{N}$). (Itävalta 1989; 1998)

407. Lukujonolle (a_n) pätee $a_1 = 0$, $a_2 = \dfrac{3}{5}$ ja

$$a_n = \frac{2a_{n-2} - a_{n-1} - 1}{3a_{n-2} - a_{n-2}a_{n-1} - 2},$$

kun $n \geq 3$. Määritä a_n:n lauseke n:n funktiona.

408. Osoita, että kolmen peräkkäisen kokonaisluvun kuution summa on jaollinen kyseisten lukujen summalla. (Etelä-Afrikka 2002; 2003)

409. Määritä positiiviset kokonaisluvut m ja n, joille $1!+2!+\cdots+m! = n^2$. (Etelä-Afrikka 2002; 2003)

410. Osoita, ettei ole olemassa funktiota f, jolle olisi kaikilla reaaliluvuilla x voimassa $f(1+f(x)) = 1-x$ ja $f(f(x)) = x$. (Etelä-Afrikka 2002; 2003)

411. Selvitä, mitkä positiiviset kokonaisluvut voidaan lausua peräkkäisten parittomien kokonaislukujen summana. (Etelä-Afrikka 2002; 2003)

412. Luvut p, q ja r ovat rationaalilukuja ja $pq+qr+rp = 1$. Osoita, että $(1+p^2)(1+q^2)(1+r^2)$ on rationaaliluvun neliö. (Etelä-Afrikka 2002; 2003)

413. Tarkastellaan suuntaissärmiötä, jonka pohjat ovat n-kulmioita (ja muut sivutahkot siis suunnikkaita). Suuntaissärmiön $2n$ kärkeä väritetään kukin joko punaiseksi, siniseksi tai keltaiseksi. Osoita, ettäväritys voidaan tehdä niin, että jokainen kärki yhdistyy särmällä kolmeen eriväriseen kärkeen silloin ja vain silloin, kun n on jaollinen kolmella. (Etelä-Afrikka 2002; 2003)

414. Määritä suurin n jolla on olemassa n:n reaaliluvun jono, jossa jokaisen kolmen peräkkäisen luvun summa on positiivinen ja jokaisen viiden peräkkäisen luvun summa on negatiivinen. (Etelä-Afrikka 2002; 2003)

415. Todista: jos a, b ja c ovat kolmion sivujen pituudet, niin

$$\frac{3}{2} \le \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2.$$

(Etelä-Afrikka 2002; 2003)

416. Kolmiossa $\triangle ABC$ on $\angle BAC = 30°$ ja $\angle ABC = 50°$. Piste M on suvulla AC, ja $CM = CB$. Osoita, että $BM = AC$. (Etelä-Afrikka 2002; 2003)

417. Puoliympyrän Π keskipiste on O ja halkaisija AB. Ympyrä Γ_1 sivuaa Π:tä ja lisäksi AB:tä pisteessä O. Ympyrä Γ_2 sivuaa Π:tä, Γ_1:tä ja AB:tä. Määritä Γ_2: säde, kun $AB = 8$.

418. Kolmion $\triangle ABC$ korkeusjanat ovat AD, BE ja CF. Kolmioiden $\triangle AEF$, $\triangle BFD$ ja $\triangle CDE$ korkeusjanojen leikkauspisteet ovat K, M ja N. Osoita, että kolmiot $\triangle KMN$ ja $\triangle DEF$ ovat yhteneviä. (Etelä-Afrikka 2002; 2003)

419. Ympyrät Γ_1 ja Γ_2 leikkaavat toisensa pisteissä A ja B, ja näihin pisteisiin piirretyt ympyröiden tangentit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Piste M on ympyrän Γ_1 kehällä ja ympyrän Γ_2 sisäpuolella. Suorat AM ja BM leikkaavat Γ_2:n myös pisteissä X ja Y. Osoita, että XY on Γ_2:n halkaisija. (2003)

420. Olkoot C_1, C_2, ..., C_n ($n \geq 3$) saman pisteen M kautta kulkevia ympyröitä. Kolme pisteen M kautta kulkevaa suoraa leikkaa ympyrät eri pisteissä A_1, A_2, ..., A_n; B_1, B_2, ..., B_n ja X_1, X_2, ..., X_n. Todista: jos $A_1A_2 = A_2A_3 = \ldots = A_{n-1}A_n$ ja $B_1B_2 = B_2B_3 = \ldots = B_{n-1}B_n$, niin $X_1X_2 = X_2X_3 = \ldots = X_{n-1}X_n$. (Romania 1997; 2003)

421. Määritä funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{3 + 2\sin x}{\sqrt{1 + \cos x} + \sqrt{1 - \cos x}}$$

arvojoukko. (Romania 1997; 2003)

422. Olkoot a, b, c ja d reaalilukuja ja olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ funktio, jolle pätee $f(2) + f(5) < 7 < f(3) + f(4)$. Todista, että on olemassa u, $v \in \mathbb{R}$ niin, että $u + v = 7$ ja $f(u) + f(v) = 7$. (Romania 1997; 2003)

423. Olkoot a, b, c ja d reaalilukuja ja olkoot $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + a|x| + b = 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid \lfloor x \rfloor^2 + c\lfloor x \rfloor + d = 0\}$ ($\lfloor x \rfloor$ on suurin kokonaisluku, joka on $\leq x$). Tiedetään, että joukossa $A \cap B$ on tasan kolme alkiota. Osoita, että a ei ole kokonaisluku. (Romania 1997; 2003)

424. Etsi (järkevästi perustellen ja koneapuun turvautumatta) luvun miljoona miinus yksi suurin alkutekijä. (2003)

425. Merkitään lukua, jonka numerot vasemmalta oikealle ovat a_n, a_{n-1}, ..., a_1, symbolilla $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1}$. Todista (ei kovin tehokas) seitsemällä jaollisuuden sääntö: luku $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1}$ on jaollinen seitsemällä silloin ja vain silloin, kun luku $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2} - 2a_1$ on jaollinen seitsemällä. (2003)

426. Todista, että jokainen luvuista $6^{2n+1} + 5^{n+2}$ on jaollinen luvulla 31. (2003)

427. Määritä (ilman koneapuja) luvun $3^{999} - 2^{999}$ kaksi viimeistä numeroa. (2003)

428. Olkoon a positiivinen kokonaisluku. Osoita, että yhtälöllä

$$x^2 - y^2 = a^5$$

on aina kokonaislukuratkaisu (x, y). (2003)

429. Oletetaan, että 3 ei ole kokonaisluvun n tekijä. Todista, että kulma, jonka suuruus on $\frac{1}{n} \cdot 180°$, voidaan jakaa kolmeen osaan harpilla ja viivoittimella. (Kulmaa voidaan tunnetusti siirtää harpin ja viivoittimen avulla, joten sitä voidaan monistaa.) (2003)

430. Todista, että kaikille kolmion kulmille α, β pätee

$$\frac{\sin\alpha + \sin\beta}{2} \leq \sin\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

(2003)

431. Osoita: jos $\{a_1, a_2, \ldots, a_{2003}\} = \{1, 2, \ldots, 2003\}$, niin

$$(a_1 - 1)(a_2 - 2)\cdots(a_{2003} - 2003)$$

on parillinen luku. (2003)

432. Olkoot a, b ja c ei-negatiivisia lukuja. Osoita, että

$$8abc \leq (a+b)(b+c)(c+a).$$

(2003)

433. Olkoot a, b ja c positiivisia lukuja ja olkoon $a+b+c=1$. Todista, että

$$ab + bc + ca \leq \frac{1}{3}.$$

(2003)

434. $ABCD$ on neliö. Suora ℓ_1 leikkaa neliön sivut AB ja CD pisteissä E ja F ja suora ℓ_2 leikkaa neliön sivut BC ja DA pisteissä G ja H. Lisäksi $\ell_1 \perp \ell_2$. Todista, että $EF = HG$. (2003)

435. Kolmion ABC sivut yksinä sivuina piirretään kolmion ulkopuolelle neliöt $ADEB$ ja $BFGC$. Osoita, että EF on kaksi kertaa niin pitkä kuin kolmion ABC keskijana BP. (2003)

436. Olkoon A reaalilukujoukko, jolle on voimassa

(a) $1 \in A$;
(b) $x \in A \Rightarrow x^2 \in A$;
(c) $x^2 - 4x + 4 \in A \Rightarrow x \in A$.

Osoita, että $2000 + \sqrt{2001} \in A$. (2003)

437. Kolmiossa ABC on $\angle CAB = 90°$. Kulman $\angle ABC$ puolittaja leikkaa sivun CA pisteessä D. Osoita, että $BC - BD = 2 \cdot AB$ jos ja vain jos

$$\frac{1}{BD} - \frac{1}{BC} = \frac{1}{2 \cdot AB}.$$

(2003)

438. Olkoot $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, …, $\mathbf{v}_n$ tason vektoreita ja olkoon jokaisen pituus enintään 1. Osoita, että on olemassa luvut c_1, c_2, …, c_n siten, että jokainen niistä kuuluu joukkoon $\{-1, 1\}$ ja

$$|c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n| \le \sqrt{2}.$$

(2003)

439. Määritä kaikki positiivisten rationaalilukujen kolmikot (x, y, z), joille $x + \frac{1}{y}$, $y + \frac{1}{z}$ ja $z + \frac{1}{x}$ ovat kaikki kokonaislukuja. (2003)

440. Tiedetään, että $1 < y < 2$ ja $x - y + 1 = 0$. Määritä lausekkeen

$$\sqrt{4x^2 + 4y - 3} + 2\sqrt{y^2 - 6x - 2y + 10}$$

arvo. (2002)

441. Määritä kaikki kokonaisluvut n, joille

$$(n^2 - 1)x < -3n^3 - 4n^2 + n + 2$$

kaikilla positiivisilla reaaliluvuilla x. (2002)

442. Osoita, että jos k on kokonaisluku, niin $(2k+1)^3 - (2k-1)^3$ on kolmen neliöluvun summa. Osoita vielä, että jos n on positiivinen kokonaisluku, niin luku $(2n+1)^3 - 2$ on $3n - 1$:n ykköstä suuremman neliöluvun summa. (2002)

443. Reaaliluvuista a, b, c ja d tiedetään, että

$$\begin{aligned} a + b + c &\le 3d, \\ b + c + d &\le 3a, \\ c + d + a &\le 3b, \\ d + a + b &\le 3c. \end{aligned}$$

Selvitä lukujen keskinäiset suuruussuhteet! (2002)

444. Nollasta eroavat reaaliluvut x, y, z ja t toteuttavat yhtälöryhmän

$$\begin{cases} x + y + z = t \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{t} \\ x^3 + y^3 + z^3 = 1001^3. \end{cases}$$

Määritä $x + y + z + t$. (2002)

445. a, b ja c ovat erään kolmion sivun pituudet. Todista, että

$$\frac{a}{-a+b+c}+\frac{b}{a-b+c}+\frac{c}{a+b-c}\geq 3.$$

(2002)

446. Kolmiossa ABC on $AC = BC$. Pisteet A_1, B_1 ja C_1 ovat sivujen BC, CA ja AB keskipisteet. Pisteet A_2 ja B_2 ovat suoran AB suhteen pisteiden A_1 ja B_1 kanssa symmetriset pisteet. Suorat CA_2 ja A_1C_1 leikkaavat toisensa pisteessä M ja suorat CB_2 ja B_1C_1 leikkaavat toisensa pisteessä N. Suorat AN ja BM leikkaavat toisensa pisteessä P. Todista, että $AP = BP$. (2002)

447. Ratkaise yhtälö

$$\frac{1}{|x-2|}=\frac{1}{|x-52a|}.$$

Todista, että jos a on alkuluvun neliö, niin yhtälöllä on ratkaisu, joka on yhdistetty kokonaisluku. (2002)

448. Kolmio ABC on teräväkulmainen, ja sen sivujen pituudet ovat $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Jos D on kolmion sivun BC piste, niin merkitään E:llä ja F:llä sellaisia sivujen AB ja AC pisteitä, että $DE \perp AB$ ja $DF \perp AC$. Olkoon vielä S kolmion ABC ala ja h_B, h_C kolmion kärjistä B ja C piirrettyjen korkeusjanojen pituudet. Osoita, että

$$\frac{4S^2}{b^2+c^2}\leq DE^2+DF^2\leq \max\{h_B^2,\, h_C^2\}.$$

(2002)

449. $ABCD$ on neliö, ja E ja F ovat sisäpisteitä sivuilla AB ja AD. Jana EF leikkaa neliön lävistäjän AC pisteessä P. Todista, että

$$\frac{1}{AE}+\frac{1}{AF}=\frac{\sqrt{2}}{AP} \quad \text{ja} \quad AP^2\leq \frac{AE\cdot AF}{2}.$$

(2002)

450. $SABC$ on tetraedri ja $\angle ASB = \angle BSC = \angle CSA = 90°$. Todista: jos M on janan AS piste ja N on janan BC piste, niin

$$\frac{1}{MN^2}\leq \frac{1}{SB^2}+\frac{1}{SC^2}.$$

(2002)

451. $ABCDA'B'C'D'$ on suorakulmainen särmiö. Olkoot E ja F särmiön sivutahkojen $ABCD$ ja $ADD'A'$ keskipisteet. Tasot BCF ja $B'C'E$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Olkoot M ja N pisteiden A' ja B kohtisuorat projektiot suorilla AB' ja $B'C$. Olkoon vielä $n = \dfrac{C'D}{B'N}$. Osoita, että $n > \sqrt{2}$. Määritä tetraedrin $BB'MN$ ja suorakulmaisen särmiön tilavuuksien suhde n:n funktiona. (2002)

452. Olkoot p ja q positiivisia kokonaislukuja ja olkoon $1 \le q \le p$. Olkoon $a = \left(p + \sqrt{p^2+q}\right)^2$. Osoita, että a on irrationaaliluku ja että sen desimaaliosa on suurempi kuin 0,75. (2002)

453. Määritä kaikki alkuluvut p ja q, joille $p^2+3pq+q^2$ on neliöluku. Määritä myös kaikki alkuluvut, joille $p^2+3pq+q^2$ on luvun 5 potenssi.

454. Todista, että (auki kirjoitetun) luvun $2^{1999}+2^{2000}+2^{2001}$ kolmanneksi viimeinen numero on parillinen. (2002)

455. On annettu O-keskinen ympyrä $\mathcal{Y}$, jonka säde on r, sekä jana AB, jonka pituus on $a < 2r$. Konstruoi ympyrään suorakaide, jonka yksi sivu on a:n pituinen ja AB:n suuntainen. (2001)

456. On annettu kolmio ABC ja jana DE, joka on lyhyempi kuin kolmion pisin sivu. Määritä kolmion piiriltä pisteet F ja G siten, että $FG = DE$ ja $FG \| DE$. (2001)

457. Suorat ℓ_1 ja ℓ_2 ovat yhdensuuntaiset, suora ℓ_3 leikkaa ne. a on suurempi kuin suorien ℓ_1 ja ℓ_2 etäisyys. Konstruoi tasasivuinen kolmio, jonka sivun pituus on a ja jonka kärjet ovat suorilla ℓ_1, ℓ_2 ja ℓ_3. (2001)

458. Annettu ympyrät ω_1 ja ω_2 sekä suora ℓ. Konstruoi ℓ:n suuntainen suora, josta ω_1 ja ω_2 leikkaavat yhtä pitkät jänteet. (2001)

459. Kolmion ABC sivut kantoina piirretään kolmion ulkopuolelle tasasivuiset kolmiot ARB, BPC ja CQA. Osoita, että $AP = BQ = RC$ ja että AP, BQ ja CR kulkevat saman pisteen F kautta. (F on kolmion ABC *Fermat'n piste*.) (2001)

460. Määritä kolmion ABC piste P, jolle $|AP| + |BP| + CP|$ on mahdollisimman pieni. (2001)

461. Todista, että suunnikkaan sivut sivuina piirrettyjen neliöiden keskipisteet ovat erään neliön kärjet. (2001)

462. Konstruoi neliö, jonka sivut kulkevat neljän annetun pisteen A, B, C ja D kautta. (2001)

463. Konstruoi ympyrän ω jänne, jonka keskipiste on annettu piste P. (2001)

464. Konstruoi viisikulmio, kun tunnetaan sen sivujen keskipisteet. (2001)

465. Olkoon A ympyröiden ω_1 ja ω_2 leikkauspiste. Konstruoi A:n kautta suora, josta molemmat ympyrät leikkaavat yhtä pitkän jänteen. (2001)

466. Pisteet A ja B ovat samalla puolella suoraa ℓ. Osoita: jos piste X on suoralla ℓ, niin murtoviiva AXB on lyhin, kun AX:n ja ℓ:n välinen kulma on sama kuin BX:n ja ℓ:n välinen kulma. (2001)

467. Määritä annetun teräväkulmaisen kolmion ABC sisään piirretyistä kolmioista se, jonka piiri on pienin. (2001)

468. Konstruoi annetun pisteen M kautta suora, joka leikkaa kaksi annettua suoraa ℓ_1, ℓ_2 samassa kulmassa. (2001)

469. Piste P on kiinteä, mutta piste Q kiertää pitkin ympyrää ω. Miten janan PQ keskipiste M liikkuu? (2001)

470. Konstruoi teräväkulmaiseen kolmioon ABC neliö, jonka kaksi kärkeä on sivulla BC ja kaksi muuta kärkeä sivuilla AB ja AC. (2001)

471. Puolisuunnikkaan $ABCD$ sivut AB ja CD ovat yhdensuuntaisia. Lävistäjien AC ja BD leikkauspiste on P. Kolmioiden ABP ja CDP alat ovat S_1 ja S_2; puolisuunnikkaan ala on S. Osoita, että $\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} = \sqrt{S}$. (2001)

472. Piste M on kulman ABC aukeamassa. Konstruoi jana, jonka päätepisteet ovat kulman kyljillä ja jonka M jakaa suhteessa $1 : 2$. (2001)

473. *Taikaneliön* jokaisen rivin, sarakkeen ja lävistäjän lukujen summa on sama. 3×3-taikaneliön ylärivillä ovat luvut x, 19 ja 96 ja toisen rivin ensimmäinen luku on 1. Määritä x. (AIME 1996)

474. Merkitään $\lfloor x \rfloor$:llä suurinta kokonaislukua, joka ei ole suurempi kuin x. Kuinka monelle positiiviselle kokonaisluvulle n pätee, että $n < 1000$ ja $\lfloor \log_2 n \rfloor$ on positiivinen parillinen kokonaisluku? (AIME 1996)

475. Määritä pienin positiivinen kokonaisluku n, jolle lausekkeen $(xy - 3x + 7y - 21)^n$ kehitelmässä on samanmuotoisten termien yhdistämisen jälkeen ainakin 1996 yhteenlaskettavaa. (AIME 1996)

476. Puinen kuutio, jonka särmän pituus on 1 cm, on vaakasuoralla pinnalla. Kuutiota valaistaan valolla, joka tulee x cm tasan yhden kuution yläpinnan kärjen yläpuolella olevasta pistemäisestä valonlähteestä. Kuution pinnalle synnyttämän varjon (johon ei lasketa kuution alle jäävää pinnan osaa) pinta-ala on 48 cm^2. Määritä suurin kokonaisluku, joka on enintään $1000x$. (AIME 1996)

477. Yhtälön $x^3 + 3x^2 + 4x - 11 = 0$ juuret ovat a, b ja c, ja yhtälön $x^3 + rx^2 + sx + t = 0$ juuret ovat $a + b$, $b + c$ ja $c + a$. Määritä t. (AIME 1996)

478. Turnaukseen osallistuu viisi joukkuetta, ja jokainen joukkue pelaa kerran jokaista muuta vastaan. Jokaisella joukkueella on jokaisessa pelissä 50 %:n todennäköisyys voittaa. Tasapelit eivät ole mahdollisia. Todennäköisyys, että turnauksessa yksikään joukkue ei voita kaikkia pelejään eikä yksikään joukkue häviä kaikkia pelejään on m/n, missä m ja n ovat positiivisia kokonaislukuja, joilla ei ole yhteisiä tekijöitä. Määritä $m + n$. (AIME 1996)

479. Kaksi 7×7-ruudukon neliöistä on maalattu keltaisiksi ja loput vihreiksi. Kahta väritystä pidetään samoina, jos toinen saadaan toisesta kääntämällä ruudukkoa sen tasossa. Monellako eri tavalla ruudukko voidaan värittää? (AIME 1996)

480. Kyllästynyt opiskelija vetelehtii aulassa, jossa on rivi suljettuja lukitsemattomia säilytyslokeroita. Lokerot on numeroitu 1:stä 1024:ään. Opiskelija avaa lokeron 1 ja kulkee lokeroriviä pitkin avaten järjestyksessä joka toisen lokeron ja jättäen joka toisen lokeron kiinni. Päästyään rivin päähän opiskelija kääntyy ympäri ja lähtee takaisin. Hän avaa taas ensimmäisen kohtaamansa suljetun lokeron ja avaa sen jälkeen joka toisen suljetun lokeron. Opiskelija jatkaa edestakaista vaelteluaan tällä tavoin, kunnes kaikki lokerot ovat auki. Minkänumeroisen lokeron opiskelija avasi viimeiseksi? (AIME 1996)

481. Määritä yhtälön

$$\tan 19x^\circ = \frac{\cos 96^\circ + \sin 96^\circ}{\cos 96^\circ - \sin 96^\circ}$$

pienin positiivinen kokonaislukuratkaisu. (AIME 1996)

482. Yksikkökuutioista kootaan suorakulmainen $150 \times 324 \times 375$-särmiö. Kuinka monen yksikkökuution kautta särmiön avaruuslävistäjä kulkee? (AIME 1996)

483. Olkoon $n > 2$ ja olkoon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sellainen funktio, että jokaiselle säännölliselle n-kulmiolle $A_1A_2 \ldots A_n$ pätee

$$f(A_1) + f(A_2) + \cdots + f(A_n) = 0.$$

Osoita, että $f(P) = 0$ kaikilla $P \in \mathbb{R}^2$. (Romania 1996)

484. Määritä suurin n, jolle seuraava väite on tosi: ”On olemassa n eiŒnegatiivista kokonaislukua $x_1, x_2, \ldots, x_n$, näistä ainakin yksi nollasta eroava, niin, että jokaiselle jonolle $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$, missä jokainen $\varepsilon_i \in \{-1, 0, 1\}$ ja ainakin yksi $\varepsilon_i \neq 0$, luku $\varepsilon_1 x_1 + \varepsilon_2 x_2 + \cdots + \varepsilon_n x_n$ on jaoton luvulla n^3.” (Romania 1996)

485. Olkoot x ja y reaalilukuja. Osoita, että jos joukko $\{\cos n\pi x + \cos n\pi y \mid n \in \mathbb{N}\}$ on äärellinen, niin $x \in \mathbb{Q}$ ja $y \in \mathbb{Q}$. (Romania 1996)

486. Olkoon $ABCD$ jännenelikulmio [nelikulmio, jonka ympäri voidaan piirtää ympyrä] ja M joukko, jonka alkiot ovat kolmioiden BCD, ACD, ABD ja ABC sisään piirrettyjen ympyröiden ja sivuympyröiden [ympyrä, joka sivuaa yhtä kolmion sivua ja kahden muun jatkeita] yhteensä 16 keskipistettä. Osoita, että on olemassa kaksi neljän yhdensuuntaisen suoran joukkoa K ja L siten, että jokainen $K \cup L$:n suora sisältää tasan 4 M:n pistettä. (Romania 1996)

487. Ympyrällä ζ, jonka keskipiste on O, on annettu pisteet A ja B siten, että $OA \perp OB$. Ympyrät ζ_1 ja ζ_2 sivuavat ζ:aa sisäpuolisesti pisteissä A ja B ja toisiaan ulkopuolisesti. Ympyrä ζ_3 on kulman AOB sisällä ja sivuaa ympyröitä ζ_1 ja ζ_2 pisteissä S ja T sekä ympyrää ζ sisäpuolisesti pisteessä C. Miten suuri on kulma $\angle SCT$? (Romania 1996)

488. Puoliympyrän keskipiste on O ja halkaisija AB. Suora d leikkaa suoran AB pisteessä M ja puoliympyrän pisteissä C ja D niin, että $MB < MA$ ja $MD < MC$. Kolmioiden AOC ja DOB ympäri piirretyt ympyrät leikkaavat toisensa myös pisteessä K. Osoita: $MK \perp KO$. (Romania 1996)

489. Määritä luvun $9999!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 9999$ kolme viimeistä numeroa.

490. Todista, että sekä lukujen $2^m + 2^k$ että lukujen $3^m + 3^k$ $(m, k \in \mathbb{N},\ m \neq k)$ joukossa on äärettömän monta kokonaisluvun neliöä. (Liettua 1993)

491. Kolmion ABC sisään on piirretty ympyrä. Sivuamispisteet ovat $C_1 \in AB$, $A_1 \in BC$, $B_1 \in CA$. Tiedämme, että $|AA_1| = |BB_1| = |CC_1|$. Todista, että kolmio ABC on tasasivuinen. (Liettua 1993)

492. Voiko positiivisen kokonaisluvun neliön numeroiden summa olla 2001? (Liettua 1993)

493. Osoita, että kaikilla $a > 0$ ja $b > 0$ pätee

$$|e^{-a} - e^{-b}| \leq \frac{2|a-b|}{b}.$$

(Liettua 1993)

494. Osoita, että luku $4n^3 + 6n^2 + 4n + 1$ on yhdistetty luku kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla n. (Liettua 1993)

495. Osoita, että jos kahdella ympyrällä on kaksi yhteistä pistettä, ne ovat joko saman pallon pinnalla tai samassa tasossa. (Liettua 1993)

496. Kaikki erään kappaleen tasoleikkaukset ovat joko ympyräkiekkoja tai yksittäisiä pisteitä. Osoita, että kappale on pallo. (Liettua 1993)

497. Jaa lauseke

$$(1+x+x^2)(1+x+x^2+\ldots+x^{10})-(1+x+x^2+\ldots+x^6)^2$$

ensimmäisen ja toisen asteen polynomien tuloksi.

498. Ratkaise yhtälö

$$32[x]^2+16x^2-32x[x]-24x=11,$$

missä $[x]$ on suurin kokonaisluku, joka on $\leq x$. (Liettua 1993)

499. Olkoot $n, m \in \mathbb{N}$ ja

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}>m.$$

Osoita, että

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{3n}>m+1.$$

(Liettua 1993)

500. Onko olemassa kaksi kuperaa nelikulmiota, joista toinen on toisen sisällä, siten että sisemmän nelikulmion lävistäjien pituuksien summa on suurempi kuin ulomman nelikulmion lävistäjien pituuksien summa? (Liettua 1993)

501. Välillä $(-1,\,1)$ on annettu seitsemän eri pistettä. Osoita, että niistä voidaan valita kaksi, x ja y, siten, että

$$0<x\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-x^2}<\frac{1}{2}.$$

(Liettua 1993)

502. Todista, että summa $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}$ ei ole kokonaisluku millään $n>1$. (Liettua 1993)

503. a) Esitä esimerkki epätriviaalista funktiosta f, jolle pätee $f(x+1)=2f(x)$ kaikilla $x\in(-\infty,\,\infty)$. b) Määritä kaikki tällaiset funktiot. (Liettua 1993)

504. Todista, että luku

$$x=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\ddots\cfrac{1}{2000+\sqrt{2001}}}}}}$$

on erään kokonaislukukertoimisen toisen asteen yhtälön $ax^2+bx+c=0$ ratkaisu. (Liettua 1993)

505. Positiiviset kokonaisluvut m ja n sekä yhtälöiden

$$x^2 - mx + n + 1 = 0 \quad \text{ja} \quad x^2 - (n+1)x + m = 0$$

neljä positiivista kokonaislukuratkaisua muodostavat aritmeettisen jonon, jonka summa on 21. Määritä m ja n. (Liettua 1993)

506. Säännöllisen kuusikulmion kärkien koordinaatit ovat kaikki kokonaislukuja. Onko tämä mahdollista a) tasossa, b) (kolmiulotteisessa) avaruudessa? (Liettua 1993)

507. Todista, että jos $x^5 - x^3 + x = p > 0$, niin $x^6 \geq 2p - 1$. (Liettua 1993)

508. Ratkaise kokonaislukujen joukossa yhtälö

$$k^3 + 1000k^2n - 2kn^2 - 1993 = 0.$$

(Liettua 1993)

509. Olkoon P janan AB piste. Olkoot APQ ja BRP tasakylkisiä suorakulmaisia kolmioita niin, että Q ja R ovat samalla puolella suoraa AB. Määritä janan QR keskipisteiden joukko, kun P käy läpi janan AB pisteet.

510. Teräväkulmaisen kolmion ABC kärkien A, B ja C kohtisuorat projektiot sivuilla BC, CA ja AB ovat D, E ja F. Pisteiden A, B ja C kohtisuorat projektiot suorilla EF, FD ja DE ovat P, Q ja R. Osoita, että suorat AP, BQ ja CR kulkevat saman pisteen kautta.

511. Olkoot P, P_1, P_2, P_3 ja P_4 viisi eri pistettä ympyrän Γ kehällä. Olkoon a_{ij} P:n etäisyys suorasta P_iP_j. Osoita, että $a_{12}a_{34} = a_{13}a_{24}$.