Ratkaisuja

Ratkaisujen yksityiskohtaisuus ja kirjoitustapa vaihtelevat. Näitä ei ilman muuta harkintaa tule pitää "malliratkaisuina".

1. Veljekset saivat n^2 dollaria. Olkoon $n = 10a + b$. Silloin $n^2 = 100a^2 + 20ab + b^2$. Kertomuksen mukaan $n^2 = (2k+1) \cdot 10 + y$. Luvun b^2 on oltava muotoa $(2m+1) \cdot 10 + y$. Mutta kymmentä pienempien lukujen neliöistä tätä muotoa ovat vain 16 ja 36. Koska viimeisessä jakovaiheessa vanhempi veli sai 10 dollaria ja nuorempi siis 6, täytyy linkkuveitsen arvon olla 2 dollaria.

2.

$$2000 = 400 + 1600 = 20^2 + 40^2 = (a^3 - 3ab^2)^2 + (b^3 - 3a^2b)^2$$
$$= a^6 - 6a^4b^2 + 9a^2b^4 + b^6 - 6a^2b^4 + 9a^4b^2 = a^6 + 3a^4b^2 + 3a^2b^4 + b^6 = (a^2+b^2)^3.$$

Siis $a^2 + b^2 = \sqrt[3]{2000}$.

3. Kirjoitetaan yhtälö $a_n = 2 + a_{n-1}$ muotoon

$$\left\lfloor \frac{n}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{n}{n} \right\rfloor = 2 + \left\lfloor \frac{n-1}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{n-1}{n-1} \right\rfloor$$

eli

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{n}{n-1} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{n-1}{n-1} \right\rfloor. \tag{1}$$

Selvästi kaikilla k, $2 \le k \le n-1$ on $\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor \ge \left\lfloor \frac{n-1}{k} \right\rfloor$, joten

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{n}{n-1} \right\rfloor \ge \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{n-1}{n-1} \right\rfloor. \tag{2}$$

Jos $n = ab$, $2 \le a < n$, niin $\left\lfloor \frac{n}{a} \right\rfloor = b > \left\lfloor \frac{n-1}{a} \right\rfloor$. Tällöin (2):ssa on aito erisuuruus, joten (1) ei toteudu. Mutta jos n on alkuluku, on kaikilla k $n = qk + r$, missä $1 \le r < k$. Silloin kaikilla k on $\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor = q = \left\lfloor \frac{n-1}{k} \right\rfloor$, ja (1) toteutuu.

4. Jos $n = 5k$, niin kumpikaan luvuista $2^n + n^2$ ja $n^2 \cdot 2^n + 1$ ei ole jaollinen 5:llä. Jos $n = 5k \pm 1$, niin $(n-1)(n+1) = n^2 - 1$ on jaollinen 5:llä. Koska $n^2 2^n + 1 = (2^n - 1)(n^2 - 1) + 2^n + n^2$, ja $n^2 2^n + 1$ ja $2^n + n^2$ ovat samanaikaisesti 5:llä jaollisia. Jos $n = 5k \pm 2$, $n^2 + 1 = 25k^2 \pm 20k + 4 + 1$, joten $n^2 + 1$ on jaollinen 5:llä. Mutta $n^2 2^n + 1 = (2^n + 1)(n^2 + 1) - 2^n - n^2$, ja $n^2 2^n + 1$ ja $2^n + n^2$ ovat jälleen samanaikaisesti 5:llä jaollisia.

5. Tehtävän luvut ovat muotoa

$$a_n = \sum_{k=0}^{n-1} 10^{2k},$$

missä $n \geq 2$ on luvussa olevien ykkösten määrä. Jos n on parillinen, a_n on jaollinen 101:llä. 101 on itsessään alkuluku. Jos $n = 2p + 1$, niin

$$11a_n = \sum_{k=0}^{2p} 10^{2k+1} + \sum_{k=0}^{2p} 10^{2k} = \sum_{k=0}^{4p+1} 10^k = (10^{2p+1} + 1) \sum_{k=0}^{2p} 10^k.$$

Jos $p \geq 1$, niin oikean puolen molemmat tekijät ovat > 11, joten a_n ei voi olla alkuluku. Siis 101 on ainoa vaadittua muotoa oleva alkuluku.

6. Olkoon $S(n)$ luvun n numeroiden summa ja olkoon $2001^{2001} = k$. Koska $2001^{2001} < \left(10^4\right)^{2001} = 10^{8004}$, luvussa k on enintään 8004 numeroa. Siis $S(k) =\leq 9 \cdot 8004 = 72036$. Näin ollen $S(S(k)) \leq 7 + 4 \cdot 9 = 43$ ja $S(S(S(k))) \leq 3 + 9 = 12$. Mutta $S(n) \equiv n \bmod 9$. Koska $2001 \equiv 0 \bmod 3$, $k \equiv 0 \bmod 9$. Silloin myös $S(S(S(n))) \equiv 0 \bmod 9$. Ainoa mahdollisuus on, että $S(S(S(k))) = 9$.

7. Tehtävän oletusten mukaan $p = 36^m$ ja $q = 5^n$. Tarkastellaan ensin tapauksia $p > q$. Luku $36^m - 5^n$ päättyy ykköseen. Jos olisi $36^m - 5^n = 1$, olisi $5^n = 36^m - 1 = (6^m - 1)(6^m + 1)$. Koska luku $6^m + 1$ päättyy seitsemään, se ei voi olla tekijänä luvussa 5^n. Siis $36^m - 5^n \geq 11$. Mutta yhtälöllä $36^m - 5^n = 11$ on ratkaisu $m = 1$, $n = 2$. Tarkastellaan tapauksia $p < q$. Luku $5^n - 36^m$ päättyy yhdeksään. Mutta jaollisuus estää, että olisi $5^n - 36^n = 9$. Siis $|p - q|$:n minimiarvo on 11.

8. Osoitetaan induktiolla, että

$$2^{a_1} + 2^{a_2} + \cdots + 2^{a_n} \leq n - 1 + 2^{a_1+a_2+\cdots+a_n}. \tag{1}$$

Väite pätee, kun $n = 2$: koska $(1-2^{a_1})(1-2^{a_2}) \geq 0$, niin $2^{a_1}+2^{a_2} \leq 1+2^{a_1+a_2}$. Oletetaan, että (1) on tosi. Silloin samasta syystä kuin edellä

$$2^{a_1} + 2^{a_2} + \cdots + 2^{a_{n+1}} \leq n - 1 + 2^{a_1+a_2+\cdots+a_n} + 2^{a_{n+1}} \leq n + 2^{(a_1+a_2+\cdots+a_n)+a_{n+1}}.$$

9. Kolmiot BNX ja YNC ovat yhdenmuotoiset.Oletetaan, että $BX \geq CY$. Silloin $XN \geq NC$,ja yhtäsuuruus pätee vain, kun $BX = CY$. Olkoon P se janan NX piste, jolle $NP = NC$. Silloin $|BNP| = |BNC|$, $|YPN| = |YNC|$ ja $|BPX| \geq |YXP|$ (yhtäsuuruus vain, kun $BX = CY$). Lisäksi $|XNY| = |XBY| - |XBN| = |XBC| - |XBN| = |BNC|$. Siis $|BNX| + |YNC| = |BPX| + |BNP| + |YNC| \geq |YXP| + |BCN| + |YPN| = |XNY| + |BCN| == 2|XNY|$. Samankokoiset kolmiot XNY ja BCN peittävät alle puolet puolisuunnikkaasta $XBYC$, joten $|XNY| \leq \dfrac{1}{4}|XBCY|$. Samoin osoitetaan, että $|XYM| \leq \dfrac{1}{4}|AXYD|$. Siis $|XNYM| \leq \dfrac{1}{4}$. Yhtäsuuruus pätee edellisten tarkastelujen mukaan silloin ja vain silloin, kun $XB = YC$.

10. Leikatkoon CE suoran AD pisteessä G. Koska $AE = ED$, kolmiot AEG ja DEC ovat yhteneviä. Siis $AG = CD = AB$. Koska GBF on suorakulmainen kolmio, sen ympäri piirretyn ympyrän halkaisija on hypotenuusa GB ja ympyrän keskipiste GB:n keskipiste A. Siis $AB = AF$, ja ABF on tasakylkinen.

11. Pisteet A, B, C ja D ovat samalla ympyrällä Γ ja samassa tasossa τ. Olkoon O pisteen E projektio tasolla τ. Suorakulmaiset kolmiot EOA, EOC ja EOF ovat yhteneviä, joten O on kolmion AFC ympäri piirretyn ympyrän Γ_1 keskipiste. Leikatkoon suora OF Γ_1:n myös pisteessä G ja suoran BD pisteessä H. Ympyröiden Γ ja Γ_1 kehäkulmista saadaan $\angle HBA = \angle DCA = \angle FGA$. Kolmiot HBF ja AGF ovat yhdenmuotoiset. Koska FG on Γ_1:n halkaisija, $\angle GAF = \angle BHF = 90°$. Koska $EO \perp \tau$ ja siis $EO \perp BD$, niin tason EGF kaksi suoraa on kohtisuorassa BD:tä vastaan. Täten BD on kohtisuorassa tasoa EGF vastaan ja erityisesti $BD \perp EF$.

12. Piste P ei voi olla kolmion ABC ulkopuolella. Jos P olisi esim. lyhemmän kaaren AB määrittämässä segmentissä, olisi se kaarista XY, joka ei sisällä pistettä Z, suurempi kuin $180°$. Olkoon siis P sellainen ABC:n sisäpiste, että kolmio XYZ on tasasivuinen. Kolmiosta APY saadaan $\angle APB = \angle PAY + \angle PYA = \angle XZY + \angle ACB = \angle ACB + 60°$. Samoin saadaan $\angle BPC = \angle BAC + 60°$ ja $\angle CPA = \angle CBA + 60°$. Mutta tunnetusti niiden pisteiden joukko, josta annettu jana näkyy annetussa kulmassa koostuu kahdesta ympyränkaaresta janan eri puolilla. Kolmion ABC sisällä on siten enintään yksi tehtävän ehdon toteuttava piste P. Tällainen piste myös on olemassa, koska edellä saatu kulmaehto merkitsee, että mainitut kaaret ovat kokomaan kolmion sisällä ja siis leikkaavat toisensa.

13. Olkoot x_1, x_2, ..., x_k positiivisia kokonaislukuja, joiden summa on n. Tehtävä on maksimoida tulo $x_1x_2\cdots x_k$. Eri vaihtoehdot läpikäymällä havaitaan, että jos $1 \le n \le 4$, maksimi on n ja se saadaan,kun $k = 1$. Olkoon $n \ge 5$. Maksimitapauksessa ei voi olla $x_j = 1$, koska tulo suurenisi, jos jokin x_i korvattaisiin $x_i + 1$:llä ja x_j jäisi pois. Myöskään mikään x_j ei ole > 4, koska jos $x > 4$, niin $2(x-2) = 2x - 4 > 0$; tulo suurenisi, jos x_j korvattaisiin luvuilla 2 ja $x_j - 2$. Minkään x_j:n ei tarvitse olla 4, sillä $x_j = 4$, tulo ei muutu, jos x_j korvataan kahdella 2:lla. Lisäksi $x_j = 2$ enintään kahdella j:n arvolla, koska $3 + 3 = 2 + 2 + 2$, mutta $3 \cdot 3 > 2 \cdot 2 \cdot 2$. Maksimitilanteessa on siis vain lukuja $x_j = 3$ ja $x_j = 2$; jälkimäisiä enintään kaksi kappaletta. Maksimitulot ovat siten seuraavat: jos $n = 3m$, maksimi on 3^m, jos $n = 3m + 1$, maksimi on $4 \cdot 3^{m-1}$,jos $n = 3m + 2$, maksimi on $2 \cdot 3^m$. Jos $n = 1$, maksimi on 1.

14. Jos $3^p > 3^q$, niin $3^p \ge 3^{q+1} > 2 \cdot 3^q$. Osoitetaan induktiolla, että $b_k < a_k < b_{k+1}$ kaikilla k. Väite pätee,kun $k = 1$: $b_1 = 3 < 9 = a_1 < 3^3 = b_2$. Oletetaan, että $b_k < a_k < b_{k+1}$. Silloin $3^{b_k} > a_k = 9^{a_{k-1}} = 3^{2a_{k-1}}$, joten $b_{k+1} > 2a_k$. Näin ollen $a_{k+1} = 9^{a_k} > 3^{a_k} > 3^{b_k} = b_{k+1}$ ja $a_{k+1} = 9^{a_k} = 3^{2a_k} < 3^{b_{k+1}} = b_{k+2}$. Tästä seuraa, että $b_{2001} < a_{2001} < b_{2002}$, joten tehtävän vastaus on $n = 2002$.

15. Jos pisteet yhdistetään pareittain 1000 janalla niin, että janojen pituuksien summa on mahdollisimman pieni, niin janat eivät leikkaa toisiaan. Jos nimittäin AB ja CD leikkaisivat pisteessä P, olisi $AB + CD = AP + PB + CP + PD > AC + BD$.

16. Olkoot värit $\{A, B, C, D\}$. Väritetty tetraedri voidaan aina kääntää niin, että pohjan väri on A ja että B-väri osoittaa esim. etelään. Silloin on vain kaksi mahdollisuutta sijoittaa C- ja D-värit: C luoteeseen ja D koilliseen tai päinvastoin. Erilaisia tetraedriväritykisiä on siis vain kaksi.

17. Olkoot A ja B X:n isoisät. Olkoon lapsista kaikkiaan k kappaletta, $k \geq 1$, sellaisia, joiden isoisät ovat A ja B. Olkoon Y lapsi, jonka isoisät eivät ole A ja B. Kuitenkin toinen näistä on Y:n isoisä; olkoon toinen isoisä C ja toinen A. Lapsen Z toinen isoisä on joko A tai B ja toinen isoisä joko A tai C. Isoisiä on siis enintään 3, ja C on kaikkien niiden $20 - k$:n lapsen isoisä, joiden isoisät eivät ole A ja B. Olkoon A:lla ja C:llä n yhteistä lapsenlasta; silloin B:llä ja C:llä on $20 - k - n$ yhteistä lapsenlasta. Ainakin yksi luvuista k, n, $20-k-n$ on enintään 6. Jos esim. $k \leq 6$, niin C:llä on $(20-k-n)+n = 20-k \geq 14$ lapsenlasta.

18. Jos namuja oli x ja jos jokainen poika sai a ja jokainen tyttö b namua, niin $13a+10b = x$. Yhtälön yksittäisratkaisu on $a = -3x$, $b = 4x$ ja yleinen ratkaisu $a = -3x + 10t$, $b = 4x - 13t$, missä t on mielivaltainen kokonaisluku. Koska $a > 0$ ja $b > 0$, on oltava $10t > 3x$ ja $13t < 4x$ eli $\dfrac{3x}{10} < t < \dfrac{4x}{13}$. Jos $\dfrac{4x}{13} - \dfrac{3x}{10} = \dfrac{x}{130} > 2$, tehtävällä on enemmän kuin yksi ratkaisu. Jos $x = 260$, ehto sievenee muotoon $78 < t < 80$. Tällöin ratkaisuja on vain yksi. Opettajalla oli enintään 260 namusta.

19. Jaetaan $\dfrac{2}{(n-1)n(n+1)}$ osamurtoihin: yhtälöstä

$$\frac{2}{(n-1)n(n+1)} = \frac{A}{n-1} + \frac{B}{n} + \frac{C}{n+1}$$

$$= \frac{(n^2+n)A + (n^2-1)B + (n^2-n)C}{(n-1)n(n+1)} = \frac{(A+B+C)n^2 + (A-C)n - B}{(n-1)n(n+1)}$$

saadaan $B = -2$, $A = C$, $2A + B = 0$, $A = C = 1$. Siis

$$\frac{2}{(n-1)n(n+1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{2}{n} + \frac{1}{n+1} = -\frac{3}{n} + \left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right).$$

Mutta näin ollen

$$\sum_{k=1}^{667} \frac{2}{(3k-1)\cdot 3k \cdot (3k+1)} = -\sum_{k=1}^{667} \frac{3}{3k} + \sum_{m=2}^{2002} \frac{1}{m} = -1 + \sum_{m=668}^{2002} \frac{1}{m},$$

mikä on sama kuin tehtävän väitös.

20. Olkoon $f(1) = a$, Silloin $f(n+1) = f(1)f(n) = af(n)$. Tästä seuraa induktiolla, että $f(n) = a^n$. Yhtälö $f(f(x)) = (f(x))^2$ on siis sama kuin $a^{a^x} = (a^x)^2 = a^{2x}$. Jos $a = 1$, yhtälön ratkaisuja ovat kaikki $x \in \mathbb{N}^*$. Jos $a \neq 1$, yhtälö saa muodon $a^x = 2x$. Ratkaisuja voi olla vain parillisilla a:n arvoilla. Jos $a > 2$, niin $a^n > 2^n \geq 2n$. Kun $a = 2$, yhtälöllä on ratkaisu $x = 1$. Tehtävällä on siis kaksi ratkaisua: $f(n) = 1$ kaikilla n ja $f(n) = 2^n$ kaikilla n.

21. Numeroista voidaan tehdä $\binom{4}{2} \cdot 2 = 12$ erilaista nelinumeroista lukua (valitaan ensin kaksi paikkaa neljästä, ja sijoitetaa niihin yhdeksiköt. Sen jälkeen on kaksi mahdollisuutta sijoittaa 1). Luvuista 3 on parillisia (yksi kutakin sellaista rakennetta kohden, jossa kaksi yhdeksikköä on kolmen ensimmäisen numeron joukossa; näitä on $\binom{3}{2}$ kappaletta). Parillisten lukujen kaksi viimeistä numeroa ovat joko 98 tai 18; ne eivät siis ole jaollisia 4:llä. Jokainen pariton luku $2m+1$ on muotoa $(m+1)^2 - m^2$. Jos olisi $a^2 - b^2 = 2m+2$, olisi luvuista $a+b$, $a-b$ tasan toinen parillinen. Silloin lukujen summa $2a$ olisi myös pariton. Tehtävän vastaus on siis 9 kappaletta

22. Olkoon $n = 1998$ ja luvut $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_k \le 0 \le x_{k+1} \le \ldots \le x_n$. Merkitään $y_i = |x_i|$. Väite tulee todistetuksi, jos osoitetaan, että $y_1 y_n \ge \frac{1}{n}$. Olkoon

$$a = \sum_{i=1}^{k} y_i = \sum_{i=k+1}^{n} y_i.$$

Silloin

$$1 \le \sum_{i=1}^{k} y_i^2 \le \sum_{i=1}^{k} y_1 y_i = a y_1,$$
$$1 \le \sum_{i=k+1}^{n} y_i^2 \le \sum_{i=k+1}^{n} y_i y_n = a y_n.$$

Siis $y_1 y_n \ge \frac{1}{a^2}$. Aritmeettisen ja neliöllisen keskiarvon välisen yhteyden nojalla

$$\frac{a^2}{k^2} = \left(\frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_k}{k}\right)^2 \le \frac{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_k^2}{k} \le \frac{1}{k}.$$

Siis $a^2 \le k \le n$, joten $\frac{1}{a^2} \ge \frac{1}{n}$. Väite on todistettu.

23. Oletuksesta seuraa $\frac{a+b}{c} \ge 2$, $\frac{a+c}{b} \ge 1$ ja $\frac{c+b}{a} \le 2$. Siis

$$\begin{aligned}\frac{a^2-b^2}{c} + \frac{c^2-b^2}{a} + \frac{a^2-c^2}{b} &= \frac{a+b}{c}(a-b) + \frac{c+b}{a}(c-b) + \frac{a+c}{b}(a-c)\\ &\ge 2(a-b) + (a-c) + \frac{c+b}{a}(c-b) = 3(a-b) + \left(\frac{c+b}{a} - 1\right)(c-b)\\ &\ge 3(a-b) + (c-b) = 3a - 4b + c.\end{aligned}$$

24. Jos $\sin x = 0$, $|\cos x| = 1$ tai $\cos x = 0$, $|\sin x| = 1$, yhtälö ratkeaa. Ratkaisuja ovat siis kaikki luvut $x = \frac{n\pi}{2}$. Olkoon $x \ne \frac{n\pi}{2}$. Silloin $|\sin x| < 1$ ja $|\cos x| < 1$, joten

$$\sin^6 x + \cos^8 x = \sin^4 x \sin^2 x + \cos^6 x \cos^2 x < \sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Yhtälöllä ei ole ratkaisua.

25. Jotta lauseke olisi ei-negatiivinen, kun $x = 0$, on oltava $a \geq 1$. Näillä a:n arvoilla lausekkeen määrittelemän funktion kuvaaja on lisäksi ylöspäin aukeava paraabeli. Paraabeli ei leikkaa x-akselia, jos diskriminantti $4(a-1)^2 - 12(a+1)(a-1) = -8(a-1)(a+2)$ on ei-positiivinen. Koska $a - 1 \geq 0$, on oltava $a + 2 \geq 0$; tämä toteutuu kaikilla $a \geq 1$. a voi siis olla mikä tahansa luku ≥ 1.

26. Jos tehtävän yhtälö on voimassa, niin

$$(x^2+y)^2 = x^4 + 2yx^2 + y^2 = 2yx^2 + 12x + y^2 - 3.$$

Oikeakin puoli on neliö, jos diskriminantti on nolla eli jos

$$12^2 - 4 \cdot 2y(y^2-3) = -8y^3 + 24y + 144 = -8(y^3 - 3y - 18) = 0.$$

Nollannen asteen tekijöitä tarkastelemalla havaitaan, että $y = 3$ on yhtälön eräs juuri; esim. derivaatan nollakohtien perusteella se on myös ainoa. Arvolla $y = 3$ saadaan nyt

$$(x^2+3)^2 = 6(x^2+2x+1)$$

ja

$$x^2 + 3 = \pm\sqrt{6}(x+1).$$

Ratkaistaan toisen asteen yhtälöt

$$x^2 \pm \sqrt{6}x + 3 \pm \sqrt{6},$$

missä ylemmät ja alemmat merkit vastaavat toisiaan. Reaalisia ratkaisuja saadaan vain alemmilla merkeillä. Ne ovat

$$x = \frac{\sqrt{6} \pm \sqrt{4\sqrt{6}-6}}{2}.$$

27. Luvuista on aina joko ainakin 7 ei-negatiivista tai ainakin 7 ei-positiivista. Koska

$$\frac{x-y}{1+xy} = \frac{(-y)-(-x)}{1+(-x)(-y)},$$

voidaan olettaa, että luvuista 7 on ei-negatiivista. Olkoot ne $0 \leq x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5 < x_6 < x_7$. Oletetaan, että

$$\frac{x_i - x_{i-1}}{1 + x_i x_{i-1}} \geq 2 - \sqrt{3},$$

$i = 3, \ldots, 7$. Silloin $x_i \geq 2 - \sqrt{3}$ ja

$$\frac{x_i - (2-\sqrt{3})}{1 + (2-\sqrt{3})x_i} \geq x_{i-1}.$$

Koska $x \mapsto \dfrac{x-2+\sqrt{3}}{1+(2-\sqrt{3})x}$ on kasvava funktio, jonka raja-arvo $+\infty$:ssä on $\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$, saadaan peräkkäin

$$x_6 < \frac{1}{2-\sqrt{3}} = 2+\sqrt{3}, \quad x_5 < \frac{2+\sqrt{3}-2+\sqrt{3}}{1+1} = \sqrt{3}, \quad x_4 < \frac{\sqrt{3}-2+\sqrt{3}}{1+2\sqrt{3}-3} = 1,$$

$$x_3 < \frac{1-2+\sqrt{3}}{1+2-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}-1}{3-\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad x_2 < \frac{\dfrac{1}{\sqrt{3}}-2+\sqrt{3}}{1+\dfrac{2}{\sqrt{3}}-1} = 2-\sqrt{3}.$$

Mutta silloin

$$\frac{x_2-x_1}{1+x_1x_2} \le x_2 < 2-\sqrt{3}.$$

28. Luku on $111\cdot(100010001\ldots1001)$ ja $111 = 3\cdot 37$.

29. Olkoon a_n luvun $\dfrac{n(n+1)}{2}$ viimeinen numero. Laske summa

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{1998}.$$

Ratkaisu. Koska $\dfrac{n(n+1)}{2} = 1+2+\cdots+n$, kysytty viimeinen numero on sama kuin summan $1+(1+2)+(1+2+3)+\cdots+(1+2+\cdots+1998) = 1998\cdot1+1997\cdot2+\cdots+1\cdot1998$ viimeinen numero, joka taas on sama kuin summan $8\cdot1+7\cdot2+\cdots+1\cdot8$ viimeinen numero. Summa jossa on 1998 termiä, koostuu 117:stä muotoa $8\cdot1+7\cdot2+\cdots+7\cdot2+8\cdot1$ olevasta summasta ja summasta $8\cdot1+7\cdot2+\cdots+1\cdot8$. Nyt kuitenkin summan $8+14+18+0+18+14+8$ viimeinen numero on 0. Tästä seuraa, että tehtävän vastaus on yös 0. [Itse asiassa luku on 1331334000.]

30. Olkoon $f(x) = \dfrac{5x}{4} + \dfrac{3}{4}\sqrt{x^2-12}$. Silloin $f(x) < \dfrac{5x}{4} + \dfrac{3x}{4} = 2x$ ja jos $x > \sqrt{12}$, niin $f(x) > 2x-1$ on yhtäpitävä epäyhtälön $x > \dfrac{51}{6}$ kanssa. Tästä seuraa, että kun $x \ge 6$, niin $[f(x)] = 2x-1$. Nyt $a_2 = 11 = 10\cdot 2^0 + 1$. Jos $a_k = 10\cdot 2^{k-2}+1$, niin $a_{k+1} = f(a_k) = 2a_k - 1 = 10\cdot 2^{k-1} + 2 - 1 = 10\cdot 2^{(k+1)-2} + 1$. Induktiolla nähdään, että $a_k = 10\cdot 2^{k-2}+1$ kaikilla $k \ge 2$, joten $a_k - 1$ on jaollinen 10:llä.

31. Jos P:n asteluku olisi ≥ 2, olisi yhtälön vasemmalla puolella polynomi, jonka asteluku on $2n$ ja oikealla puolella polynomi, jonka asteluku on $n+1 < 2n$. Siis P on enintään ensimmäistä astetta eli $P(x) = ax+b$. Saadaan identtinen yhtälö

$$ax^2 + b = 2x(a(x+1)+b) + 3 - 10x - 2x^2,$$

joka toteutuu, kun $a = 2$ ja $b = 3$.

32. Jos luvun 2^n kymmenjärjestelmäesityksessä on x numeroa, niin $2^n = a \cdot 10^{x-1}$ ja $5^n = b \cdot 10^{k-1}$, $1 < a < 10$, $1 < b < 10$. Mutta silloin $10^n = ab \cdot 10^{x-1+k-1}$. Koska ab on kymmenen potenssi ja $1 < ab < 100$, on $ab = 10$. Siis $n = x - 1 + k$ eli $x = n - k + 1$.

33. Olkoon $f(x) = [x] + [2x] + [4x] + [8x] + [16x] + [32x]$. Tarkastellaan funktion f kasvua. f on kasvava, mutta f:llä on vakioarvo jokaisella välillä $\left[\dfrac{k-1}{32}, \dfrac{k}{32}\right)$, mutta funktiolla on yksikön suuruinen hyppäys pisteissä $\dfrac{2k+1}{32}$, kahden yksikön suuruinen hyppäys pisteissä $\dfrac{2k+1}{16}$ jne. Kokonaislukujen kohdalla funktion hyppäys on 6. Nyt $f(196) = 63 \cdot 196 = 12348$. Tästä seuraa, että kun $196 - \dfrac{1}{32} \le x < 196$, niin $f(x) = 12342$. Yhtälöllä $f(x) = 12345$ ei siis ole ratkaisua.

34. Olkoon $f_k(x) = |x - k| + |x - 1999 + k|$. Silloin

$$f(x) = \sum_{k=1}^{999} f_k(x).$$

Nyt

$$f_k(x) = \begin{cases} k - x - x + 1999 - k = 1999 - 2x \ge 1999 - 2k, & \text{kun } x \le k, \\ x - k - x + 1999 - k = 1999 - 2k, & \text{kun } k \le x \le 1999 - k, \\ x - k + x - 1999 + k = 2x - 1999 \ge= 1999 - 2k, & \text{kun } x \ge 1999 - k. \end{cases}$$

Funktio f saa näin ollen pienimmän arvonsa välien $[k, 1999 - k]$, $k = 1, \ldots, 999$, leikkausjoukossa eli välillä $[999, 1000]$, ja kyseinen pienin arvo on

$$\sum_{k=1}^{999}(1999 - 2k) = 999 \cdot 1999 - 2\frac{999 \cdot 1000}{2} = 999^2 = 998\,001.$$

35. Olkoon $a \ne 1$. Joukko $A = \{0, 1, a, \dfrac{1}{a}\}$ toteuttaa vaaditun ehdon: $0 \cdot 1 + a \cdot \frac{1}{a} = 1 \in A$, $0 \cdot a + 1 \cdot \dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{a} \in A$, $0 \cdot \dfrac{1}{a} + 1 \cdot a = a \in A$.

36. Ei voi. Jokin lääneistä on sellainen, että sen keskilämpötila on alhaisin, esim. m astetta. Tähän lääniin rajoittuvissa lääneissä on ainakin yhtä suuri keskilämpötila, ja jos jossain tällaisessa läänissä olisi korkeampi keskilämpötila kuin m, olisi keskilämpötilojen keskiarvo $> m$ vastoin oletusta. Tästä seuraa, että (jos maa on yhtenäinen, eli jokainen lääni on rajanaapuriläänien avulla yhdistettävissä jokaiseen muuhun lääniin) kaikkien läänien keskilämpötilan on oltava sama.

37. Olkoot puolisuunnikkaan yhdensuuntaiset sivut a ja b ja olkoon h puolisuunnikkaan korkeus. Silloin

$$\frac{1}{2}(a+b)h = 10 \quad \text{eli} \quad h = \frac{10}{\frac{a+b}{2}}.$$

Toisaalta $h = h_1 + h_2$, missä h_1 ja h_2 ovat niiden tasakylkisten kolmioiden korkeudet, joiden yhteinen kärki on puolisuunnikkaan lävistäjien leikkauspiste ja kannat ovat puolisuunnikkaan yhdensuuntaiset sivut. Mutta nämä tasakylkiset kolmiot ovat suorakulmaisia, joten niiden korkeudet ovat samat kuin kantojen puolikkaat. Siis

$$h = \frac{1}{2}(a+b).$$

Näin ollen $h^2 = 10$ ja $h = \sqrt{10}$.

38. Olkoon kolmio ABC, $BC = 25$, ja leikatkoon sisään piirretyn ympyrän BC:n suuntainen tangentti AB:n ja AC:n pisteissä D ja E.Olkoon $BD = x$ ja $EC = y$. Yhdenmuotoisista kolmioista ABC ja ADE saadaan $AD = \frac{16}{9}x$, $AE = \frac{16}{9}y$. Koska $BCED$ on nelikulmion sisään piirretty ympyrä, on $x + y = 25 + 16 = 41$. Kolmion piiri on $25 + x + y + AD + AE = 25 + 41 + \frac{16}{9} \cdot 41 = \frac{25 \cdot 50}{9} = 138\frac{8}{9}$.

39. Oletuksesta seuraa, että $ABCD$ on jännenelikulmio ja AC on $ABCD$:n ympäri piirretyn ympyrän halkaisija. Kehäkulmalauseen nojalla $\angle DAC = \angle DBC$. Suorakulmaisista kolmioista ABC ja ABK saadaan heti $\angle BAK = 90° - \angle ABK = 90° - (90° - \angle DBC) = \angle DBC$, ja väite on todistettu.

40. Tapaukset: 4 yhdensuuntaista suoraa: 5 osaa; 3 yhdensuuntaisa ja 1 leikkaava: 8 osaa; 2 yhdensuuntaisparia: 9 osaa; 2 yhdensuuntaista ja 2 ei-yhdensuuntaista: 10 tai 9 osaa; ei yhdensuuntaisia, ei kolmea suoraa saman pisten kautta: 11 osaa; ei yhdensuuntaisia, 3 suoraa leikkaa samassa pisteessä: 10 osaa; ei yhdensuuntaisia, 4 suoraa leikkaa samassa pisteessä: 8 osaa.

41. Täydennetään kolmio ABC suunnikkaaksi $ABDC$. Kolmioepäyhtälön perusteella $2 \cdot AM = AD < AB + BD = AB + AC$. Oikeanpuoleinen epäyhtälö on tässä. Kolmioista ABM ja AMC saadaan

$$AM + \frac{1}{2}BC > AB$$
$$AM + \frac{1}{2}BC > AC$$

Kun nämä epäyhtälöt lasketaan puolittain yhteen, saadaan ja jaetaan kahdella, saadaan vasemmanpuolinen epäyhtälö.

42. Olkoon E BC:n ja F AC:n keskipiste. Koska $AB \| EF$ ja $OF \| BH$, niin $\angle ABH = \angle OFE$. Koska myös $OE \| AH$, on $\angle OEF = \angle BAH$. Kolmiot ABH ja FEO ovat yhdenmuotoiset, ja yhdenmuotoisuussuhde on $AB : EF = 2 : 1$. Mutta tämä merkitsee, että $AH = 2 \cdot OE$.

43. Jos pisteen P etäisyydet tasasivuisen kolmion ABC sivuista ovat d_A, d_b ja d_C ja pisteen P' vastaavasti d'_A, d'_b ja d'_C ja jos $AB = a$, niin kolmion ala on toisaalta $\frac{a}{2}(d_A + d_B + d_C)$, toisaalta $\frac{a}{2}(d'_A + d'_B + d'_C)$. Siis $d_A + d_B + d_C = d'_A + d'_B + d'_C$.

44. Olkoon ABC kolmio ja $a > b$. Merkitään l_A:lla ja l_B:llä A:sta ja B:stä piirrettyjen kulmanpuolittajien pituuksia. Tarkastelemalla kolmion ja niiden osakolmioiden, joihin kulmanpuolittaja jakaa kolmion, aloja, saadaan

$$\frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}(cl_A + l_Ab)\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Koska $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$, saadaan

$$l_A = \frac{2bc\cos\frac{\alpha}{2}}{b+c} = \frac{2\cos\frac{\alpha}{2}}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}.$$

Samoin

$$l_B = \frac{2\cos\frac{\beta}{2}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{c}}.$$

Koska $a > b$, on $\alpha > \beta$. Lisäksi $\frac{\alpha}{2} < 90°$ ja $\frac{\beta}{2} < 90°$, joten $\cos\frac{\alpha}{2} < \cos\frac{\beta}{2}$. Toisaalta $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$. Kun nämä epäyhtälöt yhdistetään, saadaan $l_A < l_B$.

45. Tunnetun kaavan mukaan pisteen (0, 0) etäisyys suorasta $2x + 4y - 1 = 0$ on

$$\frac{|2\cdot 0 + 4\cdot 0 - 1|}{\sqrt{2^2+4^2}} = \frac{1}{\sqrt{20}}.$$

Siten jokaisen suoran $2x + 4y = 1$ pisteen (x, y) etäisyys origosta on ainakin $\frac{1}{\sqrt{20}}$, eli $x^2 + y^2 \geq \frac{1}{20}$.

46. Kaikilla $k \geq 2$ pätee

$$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

Siis

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2} < 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n}.$$

47. Epäyhtälön vasemman puolen lausekkeen arvo ei muutu, jos x korvataan $-x$:llä. Voidaan siis olettaa, että $0 \le x < 1$. Tällöin

$$\begin{aligned}2^n - (1+x)^n &= (1-x)(2^{n-1} + 2^{n-2}(1+x) + 2^{n-3}(1+x)^2 + \cdots + (1+x)^{n-1}) \\ &> n(1-x)(1+x)^{n-1} \ge n(1-x)^n > (1-x)^n.\end{aligned}$$

48. Peräkkäisistä yhtälöistä seuraa $x_k = x_{k+3}$. aina, kun $1 \le k$ ja $k \le 97$. Siis $x_1 = x_4 = \cdots = x_{100}$ ja $x_2 = x_5 = \cdots = x_{98}$. Mutta ensimmäisestä ja viimeisestä yhtälöstä seuraa $x_{100} = x_3$ ja kolmanneksi ja toiseksi viimeisistä $x_{98} = x_1$. Siis $x_1 = x_2 = x_3$, joten $3x_1 = 0$ ja $x_1 = 0 = x_2 = x_3$. Koska $x_k = x_{k+3}$, kaikki muutkin x_k:t ovat nollia.

49. Binomikaavan mukaan

$$(1+(x^2-x^4))^9 = 1 + 9(x^2-x^4) + \binom{9}{2}(x^2-x^4)^2 + \binom{9}{3}(x^2-x^4)^3 + \binom{9}{4}(x^2-x^4)^4 + \cdots.$$

x^8-tyyppisiä termejä syntyy vain kolmannesta, neljännestä ja viidennestä yhteenlaskettavasta. Näiden termien kertoimien summa on

$$\binom{9}{2} - \binom{9}{3}\cdot 3 + \binom{9}{4} = -90.$$

50. Mitkä tahansa kaksi toisista yhdensuuntaisista ja mitkä tahansa kaksi toisista yhdensuuntaisista muodostavat suunnikkaan ja jokainen suunnikas määrittää kaksi toisen lajin yhdensuuntaista ja kaksi toisen lajin yhdensuuntaista. Suunnikkaita on niin muodoin

$$\binom{n}{2}\cdot\binom{m}{2} = \frac{1}{4}nm(n-1)(m-1)$$

kappaletta.

51. Pakassa on 4 ässää ja 32 muuta korttia. Jälkimmäisistä voidaan valita 16 korttia $\binom{32}{16}$:lla tavalla, edellisistä 2 ässää $\binom{4}{2}$:lla eri tavalla. Jokainen kahden tällaisen valinnan yhdistely tuottaa tehtävässä mainitun jaon. Eri jakoja on siis

$$\frac{32!\cdot 4!}{16!^2\cdot 2!^2}\,[= 3606482340].$$

52. Lasketaan leikkauspisteiden enimmäismäärä siinä mielessä, että jokainen kahden janan leikkaus lasketaan kerran, vaikka kaksi eri janaparia sattuisikin leikkaamaan toisensa samassa pisteessä. Jokaiset kaksi pistettä toisella yhdensuuntaisella ja jokaiset kaksi pistettä toisella yhdensuuntaisella muodostavat puolisuunnikkaan, ja tällaisella puolisuunnikkaalla on tasan kasi lävistäjää ja näillä yksi leikkauspiste. Jokainen kysytty piste on jonkin tällaisen puolisuunnikkaan lävistäjien leikkauspiste. Pistepareja on toisella suoralla $\binom{n}{2}$ ja toisella $\binom{m}{2}$. Puolisuunnikkaita ja leikkauspisteitä on siis

$$\binom{n}{2}\cdot\binom{m}{2} = \frac{mn(m-1)(n-1)}{4}$$

kappaletta.

53. $11^{10}-1=(11^5-1)(11^5+1)=(11-1)(11^4+11^3+11^2+11+1)(11^5+1)$. Ensimmäinen tekijä on 10, toinen on viiden 1:een päättyvän luvun summa ja siis jaollinen 5:llä ja kolmas kahden parittoman luvun summa ja siis jaollinen 2:lla. $11^{10}-1$ on siis jaollinen luvulla $10\cdot 5\cdot 2=100$.

54. $(3^6)^n-(2^6)^n$ on jaollinen luvulla $3^6-2^6=(3^3)^2-(2^3)^2=(3^3-2^3)(3^3+2^3)=19\cdot 35$.

55. Jos x on mikä hyvänsä p:llä numerolla kirjoitettava luku, niin $(1+10^p+10^{2p})x$ on $3p$-numeroinen luku, jossa x:n numerot kertautuvat kolmesti. Luku $1+10^p+10^{2p}$ kirjoitetaan kolmella ykkösellä, joten se on kolmella jaollinen. Kolmella samalla numerolla kirjoitettavan luvun numerosumma on kolmella jaollinen, joten tällainen luku on itse kolmella jaollinen. Edellisen huomautuksen nojalla siitä, että 3^{n-1}:llä samalla numerolla kirjoitettava luku on jaollinen 3^{n-1}:llä, seuraa, että $3^n=3\cdot 3^{n-1}$:llä samalla numerolla jaollinen luku on jaollinen $3\cdot 3^{n-1}=3^n$:llä. Väite todistuu siis induktiolla.

56. Koska $n>2$, $2^n-1>3$. Mutta $(2^n+1)(2^n-1)=4^n-1=(4-1)k=3k$. Siis jomman kumman luvuista 2^n-1 ja 2^n+1 alkutekijänä on 3, eikä tämä luku ole 3. Se on siis yhdistetty luku.

57. Koska $CZ\perp XY$, PCZ on suorakulmainen kolmio. Piste Z on siis sellaisen ympyrän kehällä, jonka halkaisija on PC. Ympyrän keskipiste on janan PC keskipiste ja säde janan PC puolikas.

58. $(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})^2=2n+1+2\sqrt{n(n+1)}>2n+1+2n=4n+1$. Toisaalta $n(n+1)<\left(n+\frac{1}{2}\right)^2$, joten $2\sqrt{n(n+1)}<2n+1$ ja $(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})^2<4n+2$. Olkoon $\lfloor\sqrt{4n+1}\rfloor=m$. Silloin $m^2\le 4n+1<(m+1)^2$ ja $4n+2\le(m+1)^2$. Siis myös $\lfloor\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\rfloor=m$.

59. Per asettaa pöydälle mielivaltaisen paperin. Olkoon a_1 luku, joka tulee näkyviin. a_2 luku, joka jää alapuolelle. Nyt Karin voi valita palan, jolla on a_2 ja asettaa sen pöydälle. Alapuolelle jää nyt a_3. Jos Perillä on paperi, johon on kirjoitettu a_3, hän asettaa sen pöydälle jne. Prosessia jatketaan niin kauan kuin mahdollista. Jossain vaiheessa on asetettu paperi, jossa alapuolella on sellainen a_m, joka on jo käytetty. Koska seuraava yläpuolinen on aina sama kuin edellinen alapuolinen, on ainoa mahdollisuus, että $a_m=a_1$. Pöydälle on nyt asetettu paperit, joissa on sekä ala- että yläpuolilla luvut a_1, a_2, $\ldots a_m$. Jos kaikki paperit on jo käytetty, vaatimus on täytetty. Ellei, niin voidaan alkaa uudestaan jäljellä olevilla papereilla. Äärellisen monen kierroksen jälkeen kaikki paperit on käytetty ja kaikki luvut $1, 2, \ldots, n$ näkyvissä.

60. Huomataan, että $1995=3\cdot 5\cdot 7\cdot 19$ ja $95=5\cdot 19$. On siis $f(f(1995))=f(f(3))\cdot f(f(5))\cdot f(f(7))\cdot f(f(19))=5\cdot 19$. Alkutekijä 19 ei voi sisältyä lukuihin $f(f(3))\le 3$, $f(f(5))\le 5$ tai $f(f(7))\le 7$. Siis 19 on luvun $f(f(19))\le 19$ tekijä. Tämä on mahdollista vain, jos $f(19)=19$. Nyt $f(f(3))f(f(5))f(f(7))=5$ ja 5 on tekijänä joko $f(f(7))$:ssä tai $f(f(5))$:ssä. Jos 5 on $f(f(7))$:n tekijä, on $f(f(7))=5$ ja siis $f(7)<7$. Mahdollisuudet ovat $f(7)=5$ ja $f(7)=6=2\cdot 3$. Edellisessä tapauksessa olisi $f(f(5))f(f(7))=f(f(5))f(5)$. Jotta 5 olisi

$f(5) = f(f(7))$:n tekijä, on oltava $f(5) = 5$, jolloin $f(f(5))f(5) = 25$. Jälkimmäisessä olisi $f(f(7)) = f(2)f(3)$, johon 5 ei voi sisältyä alkutekijänä. Onkin siis oltava $f(f(5)) = 5$ ja $f(f(3))f(f(7)) = 1$ eli $f(f(3)) = f(f(7)) = 1$. Nyt $f(f(3))$ voi toteutua joko siten, että $f(3) = 1$ tai $f(3) = 2$ ja $f(2) = 1$. Jos $f(3) = 1$ ja jos lisäksi $f(2) = 1$, voi $f(7)$. arvo olla mikä tahansa luvuista 1, 2, 3, 4, 6; tulo $f(3)f(7)$ voi samoin olla mikä hyvänsä näistä. Jos $f(3) = 2$ ja $f(2) = 1$, voi $f(7)$ olla vain jokin luvuista 1, 2, 4. Tulo $f(3)f(7)$ voi olla nyt 2, 4 tai 8. Kun otetaan huomioon $f(5) = 5$ ja $f(19) = 19$, nähdään, että $f(1995)$ voi olla jokin luvuista 95, 190, 285, 380, 570, 760.

61. a) Koska $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$, niin $x - 2\sqrt{xy} + y \geq 0$, josta $x + y \geq 2\sqrt{xy}$ ja $\frac{1}{2}(x+y) \geq \sqrt{xy}$. [Tämän epäyhtälön vasen puoli on x:n ja y:n (aritmeettinen) keskiarvo ja oikea puoli x:n ja y:n *geometrinen keskiarvo*. Epäyhtälöä kutsutaan *aritmeettis-geometriseksi epäyhtälöksi*]. b) Kirjoitetaan erikseen x:n ja y:n, y:n ja z:n ja z:n ja x:n aritmeettis-geometriset epäyhtälöt ja kerrotaan ne puolittain keskenään; saadaan

$$\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{2^3} \geq \sqrt{xy}\sqrt{yz}\sqrt{zx} = xyz.$$

Kun tämä epäyhtälö jaetaan puolittain tulolla $(x+y)(y+z)(z+x)$, saadaan väite.

62. Piirretään kulman ABC puolittaja (temput: mielivaltainen ympyrä, jonka keskipiste on B, sen ja kylkien leikkauspisteet X ja Y; samasäteiset ympyrät keskipisteinä X ja Y, niiden leikkauspiste Z; suora BZ on haettu puolittaja) ja P:n kautta kulkeva suoraa BC vastaan kohtisuora suora (temput: mielivaltainen ympyrä, keskipisteenä P, se leikkaa BC:n pisteissä T ja U; samasäteiset ympyrät, keskipisteinä T ja U, niiden leikkauspiste V; suora PV on haluttu suora). Suorien BZ ja PV leikkauspiste O on halutun ympyrän keskipiste ja OP sen säde. Todistus: 1°. Ympyrä kulkee P:n kautta. 2°. Koska $BC \perp PV$ konstruktion mukaan, BC on ympyrän tangentti. 3°. Jos Q on O:n kautta piirretyn ja AB:tä vastaan kohtisuoran suoran ja AB:n leikkauspiste, niin $OQ = OP$ (kolmioissa OBP ja OBQ on kaksi samansuuruista kulmaa ja yhteinen sivu OB). Siis piste Q on ympyrällä, ja koska $OQ \perp AB$, AB on ympyrän tangentti.

63. Lavennetaan jokainen yhteenlaskettava kaavaa $a - b = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})$ hyödyntäen. Nimittäjistä tulee ykkösiä, ja osoittajat voi ryhmitellä niin, että useimmat juurilausekkeet kumoutuvat:

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{99}}$$
$$= \frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{2-1} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2} + \cdots + \frac{\sqrt{100}-\sqrt{99}}{100-99} = \sqrt{100} - 1 = 9.$$

64. Koska kertolaskua $S \times YKSI$ esittävä rivi puuttuu, $S = 0$. Rivin $Y \times YKSI$ ensimmäinen numero on 9, koska summarivillä on enemmän numeroita. Tästä seuraa, että $Y = 3$. Jotta tulot $K \times 3K0I$ ja $I \times 3K0I$ olisivat nelinumeroisia, on oltava $K \leq 3$, $I \leq 3$. Koska $Y = 3$, on joko $K = 1$, $I = 2$ tai $K = 2$, $I = 1$. Vain jälkimmäinen valinta tuottaa lopputulokseksi 8-numeroisen luvun.

65. Olkoon S_n n:nnen neliön numeroiden summa. Silloin

$$S_n = 1\cdot 1+2\cdot 2+\ldots+n\cdot n+(n-1)(n+1)+(n-2)(n+2)+\ldots+(n-(n-1))(n+(n-1)$$
$$= 1^2+2^2+\ldots+n^2+(n^2-1)+(n^2-2^2)+(n^2-3^2)+\ldots+(n^2-(n-1)^2) = (n-1)n^2+n^2 = n^3.$$

66. Olkoon a_n sallittujen väritysten lukumäärä, kun väritetään n:stä neliöstä muodostuva nauha. Silloin $a_1 = 2$, $a_2 = 3$. Yleisessä tapauksessa, jos ensimmäinen ruutu on sininen, loput $n-1$ ruutua voidaan värittää a_{n-1}:llä tavalla. Jos ensimmäinen ruutu on punainen, toinen ruutu on sininen ja loput $n-2$ ruutua voidaan värittää a_{n-2}:lla eri tavalla. Siis $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Saadaan peräkkäin $a_3 = 5$, $a_4 = 8$, $a_5 = 13$, $a_6 = 21$, $a_7 = 34$, $a_8 = 55$, $a_9 = 89$, $a_{10} = 144$.

67. Voidaan olettaa, että kynttilät ovat 20 cm pitkiä. Silloin toinen palaa nopeudella 5 cm/h ja toinen 4 cm/h. Kysytty ajanhetki t toteuttaa ehdon $20-4t = 3(20-5t)$ eli $t = \dfrac{40}{11} = 3\,\dfrac{7}{11}$.

68. Olkoot kolmioiden APS ja ASQ alat a ja b. Samakorkeuksisia kolmioita tarkastelemalla saadaan

$$\frac{AP}{PB} = \frac{a}{5} = \frac{a+b+8}{15}$$

ja

$$\frac{AQ}{QC} = \frac{b}{8} = \frac{a+b+5}{18}.$$

Sievennettyinä yhtälöt johtavat pariin

$$\begin{cases} 2a - b = 8 \\ -4a + 5b = 20, \end{cases}$$

joista ratkaistaan $a = 10$, $b = 12$. Kysytty ala on siis $10 + 12 = 22$ (cm^2).

69. Tilanne voidaan hahmottaa niin, että yksi seurueen jäsenistä kuljettaa mopoa ja muut kolme, A_1, A_2 ja A_3 kävelevät osan matkaa ja ajavat osan matkaa mopon kyydissä. Jos koko matkaan käytetään aika t ja A_i:n mopokyydissä oloaika on a_i, niin A_i etenee matkan $30a_i+6(t-a_i) = 6t+24a_i$. Jos a_i:t ovat eri suuria, jotkin seurueen jäsenet saapuvat perille ennen muita, ja viimeisen, sanokaamme A_3:n, matka-aikaa voitaisiin vähentää lisäämällä a_3:a ja pienentämällä a_1:tä (ja mahdollisesti a_2:ta). Voidaan olettaa, että $a_1 = a_2 = a_3 = a$. Kokeillaan, miten käy, jos $a = 1$ tunti. Tunnin kuluttua lähdöstä A_1 on 30 km päässä ja A_2 sekä A_3 6 km päässä. Mopo palaa takaisin, jolloin mopo ja A_2, A_3 lähestyvät toisiaan nopeudella 36 km/h. Koska välimatka on 24 km, mopo tapaa kävelijät hetkellä 1 h 40 min, jolloin A_2 ja A_3 ovat etäisyydellä 10 km. Hetkellä 2 h 40 min A_1 ja A_2 ovat etäisyydellä 40 km ja A_3 etäisyydellä 16 km. Mopo palaa takaisinpäin jälleen 40 min, noutaa A_3:n (etäisyydeltä 20 km) ja ajaa tunnin, jolloin kaikki ovat etäisyydellä 50 km. Seurue etenee siis 50 km ajassa 4 h 20 min eli 260 min. Tämä merkitsee, että 45 km matka on taitettavissa ajassa 234 min eli 3 h 54 min.

70. Olkoon kolmio ABC jaettu janalla AD kahdeksi kolmioksi; olkoot ABD ja ADC tasakylkisiä. Olkoon kolmion ABD kantakulma x ja kolmion ADC kantakulma y. Silloin $x < 90°$ ja $y < 90°$, joten $x+y < 180°$. Tästä seuraa, että ainakaan molemmille kolmioille D ei voi olla kantasivuun liittyvä kärki. Jos D on molempien tasakylkisten kolmioiden huippu, on $2x + 2y$ kolmion ABC kulmien summa, joten $x + y = 90°$. Kolmio ABC on suorakulmainen, ja suora kulma on $\angle A$. Toisaalta suorakulmaisen kolmion suora kulma voidaan jakaa kahdeksi kolmion muiden kulmien suuruiseksi kulmaksi, eli suorakulmaisille kolmioille jako onnistuu. Oletetaan sitten, että AB on kolmion ABD kanta ja DC on kolmion ADC kanta. Silloin $y = 2x$ (kolmion ABD kulman D vieruskulma!) eli $\angle C = 2\angle B$; jos näin on, ja $\angle C$ on terävä, niin jako onnistuu. Olkoon sitten AB edelleen ABD:n kanta ja AD ADC:n kanta. Edelleen on $y = 2x$, mutta nyt $\angle A = x + y = 3x = 3\angle B$. Jos $\angle A = 3\angle B$, jako onnistuu. Tapaukset, joissa AC on kolmion ADC kanta johtavat samoin jaon onnistumisen takaaviin ehtoihin $\angle B = 2\angle C$ ja $\angle A = 3\angle C$.

71. Olkoon tarkasteltava kolmio ABC, sen sivut a, b ja $c = \ell$ ja vastaavat korkeusjanat h_a, h_b, h_c. Kolmion alan kaavasta saadaan heti

$$h_a h_b h_c = \frac{8S^3}{ab\ell},$$

joten korkeusjanojen tulo maksimoituu silloin, kun ab minimoituu. Koska $ab\sin C = 2S$, ab minimoituu, kun $\sin C$ maksimoituu. Piirretään jana $AB = \ell$ ja sille yhdensuuntainen suora s, jonka etäisyys AB:stä on $\dfrac{2S}{\ell}$. Jos ABŒhalkaisijainen ympyrä leikkaa s:n pisteessä C, niin $\angle C = 90°$ ja ABC on tehtävän ratkaisu. Jos ympyrä ei leikkaa s:ää, niin merkitään D:llä AB:n keskinormaalin ja s:n leikkauspistettä. Silloin s on kolmion ABD ympäri piirretyn ympyrän tangentti (miksi?) ja jokainen s:n piste $C \neq D$ on ympyrän ulkopuolella. Tästä seuraa, että $\angle ACB < \angle ADB$, joten $\sin(\angle ACB) < \sin(\angle ADB)$. Kolmio ABD on tässä tapauksessa tehtävän ratkaisu.

72. Olkoon a pariton luku ja $b = \dfrac{1}{2}a^2-2$, $c = \dfrac{1}{2}a^2-1$. Silloin $c^2-b^2 = (c+b)(c-b) = a^2-3$.

73. Olkoon $A = (0,\ 0,\ 0)$, $B = (1,\ 1,\ 1)$ ja kysytty säde r. Nyt pallon keskipiste on $(r,\ r,\ r)$ ja yksi särmän ja pallon sivuamispiste $(r,\ 1,\ 1)$. Siis $(r-r)^2 + (1-r)^2 + (1-r)^2 = r^2$ eli $r^2 - 4r + 2 = 0$ eli $r = 2 \pm \sqrt{2}$. Vain alempi merkki pitää pallon keskipisteen kuution sisällä, niin kuin oli vaadittu.

74. Jonon n:stä täytettävästä paikasta voidaan valita $2k$ paikkaa a-kirjaimille $\dbinom{n}{2k}$ eri tavalla, ja loput $n-2k$ paikkaa voidaan täyttää b- ja c-kirjaimilla 2^{n-2k} eri tavalla. Kysytty luku on siis

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} 2^{n-2k} = 2^n \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k}.$$

Summa voidaan laskea helposti käyttämällä hyväksi binomikaavasta välittömästi seuraavaa kaavaa

$$(1+x)^n + (1-x)^n = 2\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} x^{2k};$$

kun siihen sijoitetaan $x = \dfrac{1}{2}$, tehtävän vastaukseksi tulee yksinkertaisten sievennysten jälkeen

$$\frac{1}{2}2^n\left[\left(1+\frac{1}{2}\right)^n + \left(1-\frac{1}{2}\right)^n\right] = \frac{1}{2}(3^n+1).$$

75. Voidaan olettaa, että C on origokeskinen yksikkösäteinen ympyrä ja että $A = (a,\, 0)$, $a > 0$. Olkoon $P = (x,\, y)$. Silloin $x^2+y^2 = 1$ ja $\overrightarrow{AP} = (x-a)\vec{i}+y\vec{j}$ ja $\overrightarrow{PQ} = -y\vec{i}+(x-a)\vec{j}$. Siis $\vec{OQ} = (x-y)\vec{i}+(y+x-a)\vec{j}$. Olkoon $A' = (0,\, -a)$. Nyt $\overrightarrow{A'Q} = (x-y)\vec{i}+(x+y)\vec{j}$. Mutta $|\overrightarrow{A'Q}|^2 = 2x^2+2y^2 = 2$, joten Q on A'-keskisellä $\sqrt{2}$-säteisellä ympyrällä C'. Voidaan laskea myös toisinpäin: ympyrän C' pisteestä Q lähtien löydetään ympyrän C piste P, jolle $AP = CP$ ja $AP \perp CP$.

76. Kysytty luku on $2n-1$, jos $n \le 2$ ja $2n-2$, jos $n \ge 3$. Tapaus $n = 1$ on ilmeinen ja tapaus $n = 2$ voidaan selvittää kokeilemalla. Jos $n \ge 2$, niin piirretään ruudukko koordinaatistoon niin, että neliöiden kärjet ovat pisteet $(i,,j)$, $0 \le i \le n$, $0 \le j \le n$. Tarkastellaan janoja, joiden päätepisteet ovat $(0,\, i)$ ja $(1,\, i)$; $(n-1,\, i)$ ja $(n,\, i)$; $(i,\, 0)$ ja $(i,\, 1)$; $(i,\, n-1)$ ja $(i,\, n)$, $0 < i < n$. Näistä $4(n-1)$ janasta ei yhteen neliöön voi kuulua kuin enintään kaksi kerrallaan, joten kyseisten janojen generoimiseen tarvitaan $2n-2$ neliötä. Jos $n = 3$, kaikki neliöt syntyvät neljällä 2×2-neliöllä, joiden kärjet ovat ison neliön kärjet. Jos $n \ge 4$, piirretään isonneliön kahteen vastakkaiseen kärkeen 1×1- ja $(n-1)\times(n-1)$-neliöt ja toisiin vastakkaisiin kärkiin 2×2-, 3×3-,$\ldots$, $(n-2)\times(n-2)$-neliöt. Neliöitä on silloin $4+2(n-3) = 2n-2$ kappaletta. Melko helposti voi todeta, että jokainen ruudukkoon tarvittava jana kuuluu johonkin neliöön.

77. Oletamme, että jollain positiivisilla kokonaisluvuilla m, n on $m^3-n^3 = mn+1993$. Olkoon $d = m-n$. Selvästi $d > 0$. Koska $(n+d)^3 - n^3 = n(n+d)+1993$, on

$$(3d-1)n^2 + d(3d-1)n + d^3 - 1993 = 0. \tag{1}$$

Koska $3d-1 > 0$ ja $n > 0$, on $d^3 - 1993 < 0$, mistä seuraa $d \le 12$. Jos (1) kerrotaan 27:llä, saadaan

$$27(3d-1)n^2 + 27d(3d-1)n + (3d)^3 - 1 - 53810 = 0. \tag{2}$$

Koska $(3d)^3-1$ on jaollinen $3d-1$:llä, on myös $53810 = 2\cdot 5\cdot 5381$ jaollinen $3d-1$:llä. 5381 on alkuluku ja $3d-1 \le 35$, joten $3d-1 = 2$ tai $3d-1 = 5$ eli $d = 1$ tai $d = 2$. Jos $d = 1$, n toteuttaa (1):n perusteella yhtälön $n^2+n-996 = 0$. Tällä yhtälöllä ei kuitenkaan ole kokonaislukuratkaisuja ($31\cdot 32 = 992$, $32\cdot 33 = 1056$), joten $d \ne 1$. Jos $d = 2$, n toteuttaa yhtälön $n^2+2n-397 = 0$. Myöskään tällä yhtälöllä ei ole kokonaislukuratkaisuja ($17\cdot 19 < 18^2 = 324$, $19\cdot 21 = 20^2-1 = 399$).

78. Koska k ja Γ kulkevat A:n kautta, ympyröiden sivuamispiste on A. Koska ACB on suorakulmainen ja AB on hypotenuusa, AB on Γ:n halkaisija, joten Γ:n ja k:n yhteinen tangentti AQ on kohtisuorassa AB:tä vastaan. Siis $AQ \| CH$, joten $\angle QAN = \angle ALH$. Kehäkulmalauseen nojalla toisaalta $\angle QAN = \angle AMN$. Suorakulmaiset kolmiot ALH ja AMC ovat siis yhdenmuotoiset. Koska myös kolmiot CBH ja ACH ovat yhdenmuotoiset, saadaan $\dfrac{BC}{2 \cdot HL} = \dfrac{MC}{HL} = \dfrac{AC}{AH} = \dfrac{BC}{CH}$. Siis $CH = 2 \cdot HL$, joten L on CH:n keskipiste.

79. Sovelletaan seuraavaa tunnettua Jensenin epäyhtälöstä (jos f on ylöspäin kupera funktio, niin

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}$$

ja logaritmifunktion muodosta seuraavaa tulosta: jos u, v ja w ovat positiivisia lukuja ja α, β ja γ ovat positiivisia lukuja, joille $\alpha + \beta + \gamma = 1$, niin $\alpha u + \beta v + \gamma w \geq u^{\alpha} \cdot v^{\beta} \cdot w^{\gamma}$. Tehtävän merkinnöin ovat voimassa epäyhtälöt

$$\frac{p}{bc} + \frac{q}{ca} + \frac{r}{ab} \geq \frac{1}{(bc)^p} \cdot \frac{1}{(ca)^q} \cdot \frac{1}{(ab)^r}$$

ja

$$(bc)^p (ca)^q (ab)^r \leq pbc + qca + rab.$$

Näiden perusteella

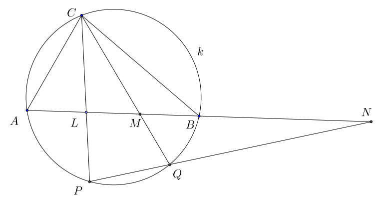
$$\frac{abc}{pa + qb + rc} = \frac{1}{\dfrac{p}{bc} + \dfrac{q}{ca} + \dfrac{r}{ab}} \leq \frac{1}{\dfrac{1}{(bc)^p} \dfrac{1}{(ca)^q} \dfrac{1}{(ab)^r}} = (bc)^p (ca)^q (ab)^r \leq pbc + qca + rab. \tag{1}$$

Voidaan olettaa, että $a \leq b \leq c$. Tällöin $pbc + qca + rab \leq pbc + (q + r)ac = pbc + (1 - p)ac$. Mutta koska $0 \leq p \leq \dfrac{1}{2}$, on $\left(\dfrac{1}{2} - p\right) ac \leq \left(\dfrac{1}{2} - p\right) bc$, josta seuraa $pbc + (1 - p)ac = \dfrac{1}{2}bc + \dfrac{1}{2}ac + \left(p - \dfrac{1}{2}\right) bc + \left(\dfrac{1}{2} - p\right) ac \leq \dfrac{1}{2}(bc + ac) = \dfrac{(a + b)c}{2}$. Aritmeettis-geometrisen epäyhtälön perusteella $(a + b)c \leq \left(\dfrac{a + b + c}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$. Siis $pbc + qca + rab \leq \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{8}$. Väite seuraa, kun tämä yhdistetään epäyhtälöön (1). – Yhtäsuuruus on voimassa esim. silloin, kun $a = b = \dfrac{1}{4}$, $c = \dfrac{1}{2}$ ja $p = q = \dfrac{1}{2}$, $r = 0$.

80. Olkoon $f(x) = ax^3 + bx + c$. Silloin $f(0) = c$ ja $f(2) = 8a + 2b + c$. Silloin $0 = 9a + 11b + 29c = f(0) + f(2) + a + 9b + 27c = f)0) + f(2) + 27\left(\dfrac{a}{27} + \dfrac{b}{3} + c\right) = f(0) + f(2) + 27f\left(\dfrac{1}{3}\right)$. Tämä merkitsee, että luvut $f(0)$, $f\left(\dfrac{1}{3}\right)$ ja $f(2)$ eivät kaikki voi olla samanmerkkisiä ja nollasta eroavia. Jatkuvana funktiona f saa arvon 0 ainakin yhdellä väleistä $\left[0,\ \dfrac{1}{3}\right]$, $\left[\dfrac{1}{3},\ 2\right]$, $[0,\ 2]$.

81. Merkitään (tavanomaisesti) $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$, $\angle BAC = \alpha$, $\angle CBA = \beta$, $\angle ACB = \gamma$ ja $LA = BM = t$. Koska $a^2 = 2b^2$, saadaan kosinilauseesta

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{c^2 - b^2}{2bc}, \quad \cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{c^2 + b^2}{2bc\sqrt{2}}.$$



On kaksi mahdollisuutta:

1°. A ja B ovat pisteiden L ja M välissä.

2°. L ja M ovat janalla AB.

Tarkastellaan näitä erikseen.

1°. Kosinilauseen nojalla

$$\begin{aligned} CM^2 &= BM^2 + BC^2 - 2 \cdot BM \cdot BC \cdot \cos(180^\circ - \beta) = t^2 + a^2 + 2at\cos\beta \\ &= t^2 + 2b^2 + 2tb\sqrt{2}\frac{b^2 + c^2}{2bc\sqrt{2}} = t^2 + 2b^2 + \frac{t}{c}(b^2 + c^2) \end{aligned} \tag{1}$$

ja

$$CL^2 = LA^2 + AC^2 - 2 \cdot LA \cdot AC \cdot \cos(180^\circ - \alpha) = t^2 + b^2 + 2tb\frac{c^2 - b^2}{2bc} = t^2 + b^2 + \frac{t}{c}(c^2 - b^2). \tag{2}$$

Lasketaan pisteiden L ja M potenssi ympyrän k suhteen. Oletuksen mukaan se on

$$LP \cdot LC = LA \cdot LB = t(c+t) = MB \cdot MA = MQ \cdot MC. \tag{3}$$

Sovelletaan Menelaoksen lausetta kolmioon LMC ja suoraan PQ. Saadaan

$$\frac{MN}{NL} \cdot \frac{LP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QM} = 1$$

eli

$$\frac{MN}{NL} = \frac{PC}{LP} \cdot \frac{QM}{CQ}. \tag{4}$$

Yhtälöistä (1), (2) ja (3) saadaan

$$\frac{PC}{LP} = \frac{LC - LP}{LP} = \frac{LC}{LP} - 1 = \frac{LC^2}{LP \cdot LC} - 1 = \frac{t^2 + b^2 + \frac{t}{c}(c^2 - b^2)}{t(c+t)} - 1 = \frac{b^2(c-t)}{ct(c+t)} \tag{5}$$

ja

$$\frac{CQ}{QM} = \frac{CM - QM}{QM} = \frac{CM^2}{CM \cdot QM} - 1 = \frac{t^2 + 2b^2 + \frac{t}{c}(b^2 + c^2)}{t(c+t)} - 1 = \frac{b^2(2c+t)}{ct(c+t)}. \tag{6}$$

Yhtälöistä (5), (6) ja (4) saadaan nyt

$$\frac{BN - t}{BN + c + t} = \frac{MN}{NL} = \frac{b^2(c-t)}{ct(c+t)} \cdot \frac{ct(c+t)}{b^2(2c+t)} = \frac{c-t}{2c+t}.$$

Tämä sievenee muotoon $BN(c+2t) = c(c+2t)$. Siis $BN = c = AB$.
2°. Päättely käy samoin kuin kohdassa 1°, mutta yhtälöt (1), (2), (3), (5) ja (6) saavat muodon

$$CM^2 = t^2 + 2b^2 - \frac{t}{c}(b^2 + c^2), \tag{1'}$$

$$CL^2 = t^2 + b^2 - \frac{t}{c}(c^2 - b^2), \tag{2'}$$

$$LP \cdot LC = t(c-t) = MQ \cdot MC, \tag{3'}$$

$$\frac{PC}{LP} = \frac{b^2(c+t)}{ct(c-t)} \tag{5'}$$

ja

$$\frac{CQ}{QM} = \frac{b^2(2c-t)}{ct(c-t)}. \tag{6'}$$

Yhtälöistä (5'), (6') ja (4) saadaan nyt

$$\frac{BN + t}{BN + c - t} = \frac{c+t}{2c-t},$$

josta $BN = c$.

82. Olkoon kuusikulmio $ABCDEF$ ja O sen keskipiste. Olkoon S joukko kuusikulmion pisteitä, josta jokaisen kahden etäisyys on $\geq \sqrt{2}$. Olkoot P ja Q S:n pisteitä. Kuusikulmion ympäri piirretyn ympyrän säde on 1. Siis $P \neq O \neq Q$. Olkoon $\angle POQ = \alpha$. Silloin

$$\cos\alpha = \frac{OP^2 + OQ^2 - PQ^2}{2OP \cdot OQ} \leq \frac{1 + 1 - 2}{2OP \cdot OQ} = 0,$$

joten $\alpha \geq 90°$. Jos olisi $\alpha = 90°$, olisi $OP^2 + OQ^2 = PQ^2 \geq 2$, mikä olisi mahdollista vain, jos $OP = OQ = 1$. Pisteet P ja Q olisivat kuusikulmion kärkiä, ja α olisi muotoa $k \cdot 60°$. Siis $\alpha > 90°$. Jos nyt $S = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$, ja pisteet on numeroitu niin, että säteet OP_j ovat järjestyksessä, niin kulmien P_1OP_2, P_2OP_3, $\ldots$, P_nOP_1 summa on toisaalta $360°$, toisaalta enemmän kuin $n \cdot 90°$. Siis $n \leq 3$. Toisaalta $n = 3$ on mahdollinen, sillä pisteiksi P_1, P_2, P_3 voidaan valita sivujen AB, CD ja EF keskipisteet. Janojen P_1P_2 P_2P_3 ja P_3P_1 pituuksiksi saadaan (esim. puolisuunnikkaasta $ABCD$) $\dfrac{3}{2} > \sqrt{2}$.

83. Olkoon f tehtävän ehdot toteuttava funktio. Sijoitetaan tehtävän ehtoon $m = n = 1$. Saadaan $2f(0) = 0$ eli $f(0) = 0$. Sijoitetaan sitten $m = 0$. Saadaan $f(n)(-f(n)) = f(-n)f(n)$ eli $f(n)(f(n)+f(-n)) = 0$. Kaikilla n on siis joko $f(n) = 0$ tai $f(-n) = f(n)$. Jos $f(n) = 0$, niin tehtävän ehdosta saadaan sijoittamalla $m = 0$ ja n:n paikalle $-n$, että $f(-n)(-f(-n)) = f(n)f(-n) = 0$. Siis $f(-n) = 0 = -f(n)$. Yhtälö

$$f(-n) = -f(n)$$

on siis voimassa kaikilla n. Sijoitetaan nyt tehtävän kaavaan $m = 2$ ja $n = 1$. Saadaan $f(3)(f(2)-1) = f(2)+1$ eli $f(3)-1)(f(2)-1) = 2$. Koska f on kokonaislukuarvoinen funktio, saadaan seuraavat neljä mahdollisuutta:

1° $f(2) = 2$ ja $f(3) = 3$,
2° $f(2) = 3$ ja $f(3) = 2$,
3° $f(2) = 0$ ja $f(3) = -1$,
4° $f(2) = -1$ ja $f(3) = 0$.

Tarkastellaan näitä kutakin erikseen.

1°. Osoitetaan, että

$$f(n) = n \tag{1}$$

kaikilla n. Asia on näin, kun $n = 1$, 2 ja 3. Oletetaan, että $f(m) = m$ kaikilla $m \leq n-1$, missä $n \geq 4$. Silloin tehtävän ehdon ja induktio-oletuksen nojalla $f(n)(f(n-1)-1) = f(n-2)(f(n-1)+1)$ eli $f(n)(n-2) = (n-2)\cdot n$. Siis $f(n) = n$. Koska $f(-n) = -f(n) = -n$, $f(n) = n$ on tosi kaikilla kokonaisluvuilla.

2°. Tehtävän ehdosta saadaan valinnoilla $m = 3$, $n = 1$ $f(4)(f(3)-f(1)) = f(2)(f(3)+1)$ eli $f(4) = 9$ ja valinnoilla $m = 4$, $n = 1$ $f(5)(f(4)-1) = f(3)(f(4)+1)$ eli $8f(5) = 20$. Tämä ei ole mahdollista, koska $f(5)$ on kokonaisluku.

3°. Osoitetaan, että

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{kun } n = 2k \\ 1, & \text{kun } n = 4k+1 \\ -1, & \text{kun } n = 4k+3. \end{cases} \tag{2}$$

Tehtävän ehdosta saadaan sijoittamalla $n = 2$ $f(m+2)f(m) = f(m-2)f(m)$. Jos $f(m) \neq 0$, on $f(m+2) = f(m-2)$. Parittomia argumenttia arvoja koskeva väite seuraa triviaalisti induktiolla. Toisaalta $f(4k)(f(4k-1)-1) = f(4k-2)(f(4k-1)+1) = 0$, joten $f(4k) = 0$, ja $f(4k+3)(f(4k+2)-1) = f(4k-3)(f(4k+2)+1)$, josta $f(4k+2) = 0$.

4°. Samoin kuin edellisessä kohdassa todistetaan induktiolla yhtälöiden $f(3k)(f(3k-1)-1) = f(3k-2)(f(3k-1)+1)$, $f(3k+1)(f(3k) \equiv 1) = f(3k-1)(f(3k)+1)$ ja $f(3k+2)(f(3k)-(-1)) = f(3k-12)(f(3k)+(-1))$ avulla, että

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{kun } n = 3k, \\ 1, & \text{kun } n = 3k+1, \\ -1, & \text{kun } n = 3k-1, \end{cases} \tag{3}$$

Jos f on tehtävän ehdot toteuttava funktio, niin f on jokin funktioista (1), (2) tai (3). Helposti nähdään, että kukin näistä funktioista myös toteuttaa tehtävän ehdot.

84. Käytetään standardimerkintöjä. Olkoon kolmion ABC ala S; $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$. Koska kolmion PQR sivut ovat kohtisuorassa ympäri piirrettyjen ympyröiden yhteisiä jänteitä MA, MB ja MC vastaan, nähdään heti, että $\angle RPQ = 90^\circ$, $\angle PRQ = 60^\circ$ ja $\angle PQR = 30^\circ$. Lisäksi P on AC:n keskipiste ja $\angle BRC = 120^\circ$, $\angle BCR = \gamma + 30^\circ$ joten $CR = \frac{a}{2\sin 120^\circ} = \frac{a}{\sqrt{3}}$. Kosinilauseen nojalla

$$PR^2 = PC^2 + CR^2 + 2\cdot PR\cdot CR\cdot\cos(\gamma+30^\circ) = \frac{b^2}{4} + \frac{a^2}{3} - \frac{2ab}{2\sqrt{3}}(\cos\gamma\cos 30^\circ - \sin\gamma\sin 30^\circ)$$

$$= \frac{b^2}{4} + \frac{a^2}{3} - \frac{ab}{\sqrt{3}}\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{2S}{ab}\cdot\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{a^3}{3} + c^2 + \frac{4S}{\sqrt{3}}\right).$$

Koska $PQ = PR\tan 60^\circ = PR\sqrt{3}$, saadaan kolmion PQR alaksi S_1

$$S_1 = \frac{1}{2}PQ\cdot PR = \frac{\sqrt{3}}{2}PR^2 = \frac{\sqrt{3}}{8}\left(\frac{a^2}{3} + c^2 + \frac{4S}{\sqrt{3}}\right) = \frac{S}{2} + \frac{\sqrt{3}}{8}\left(\frac{a^2}{3} + c^2\right).$$

Käytetään aritmeettis-geometrista epäyhtälöä: saadaan

$$S_1 - S = \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{3} + c^2\right) - \frac{S}{2} \ge \frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{\frac{a^2c^2}{3}} - \frac{S}{2} = \frac{ac}{4} - \frac{S}{2} \ge 0,$$

koska $\frac{ac}{2} > \frac{1}{2}ac\sin\beta$.

85. Oletetaan, että BC on punainen. Oletetaan, että ainakin kolme särmistä BA_i on punaisia. Olkoot BA_j, BA_k ja BA_p punaisia. Janoista A_jA_k, A_kA_p ja A_pA_j ainakin yksi on pohjan lävistäjä. Olkoon se A_jA_k. Tarkastellaan kolmiota CA_jA_k. Jos jokin sen sivusta on punainen, niin tämä sivu ja B:n ja sivun päätepisteiden välisten janojen muodostama kolmio on punainen. Muussa tapauksessa CA_jA_k:n kaikki sivut ovat sinisiä. Oletetaan, että tasan kaksi särmistä BA_i on punaisia. Olkoot ne BA_j ja BA_k. Jos A_jA_k on pohjan lävistäjä, päätellään kuten edellä. Jos A_jA_k ei ole pohjan lävistäjä, se on särmä, ja voidaan olettaa, että $A_jA_k = A_1A_2$. Tarkastellaan kolmiota $A_3A_5A_7$. Jos siinä on yksi sininen sivu, esim. A_3A_5, niin A_3A_5B on sininen kolmio. Jos sinisiä sivuja ei ole, $A_3A_5A_7$ on punainen. Sama päättely kelpaa myös, jos enintään yksi särmistä BA_i on punainen.

86. Jos $n = 2$, $\frac{n(n+1)}{2} = 3$, ja $S = \{2, 3, 4\}$, joten $n = 2$ on kyseeseen tulevia lukuja. Osoitetaan, että se on ainoa. Oletetaan, että $n \ge 3$, $m = \frac{n(n+1)}{2}$ ja että luvuilla a_1, a_2, $\ldots$, a_n on se ominaisuus, että mitkään kaksi m:stä luvusta $a_i + a_j$, $i \le j$, eivät ole kongruentteja $\bmod m$. Johdetaan ristiriita: Tarkastellaan erotuksia $a_i - a_j$, $i \ne j$. Niitä on $n(n-1)$ kappaletta. Jos olisi $a_i - a_j \equiv 0 \bmod m$, olisi $a_i + a_i \equiv a_j + a_j \bmod m$, vastoin oletusta. Erotuksilla $a_i - a_j$ on siis enintään $m - 1$ eri jakojäännöstä $\bmod m$. Mutta jos $n \ge 3$, niin $n^2 \ge 3n$ ja $n(n-1) \ge \frac{n(n+1)}{2} = m > m - 1$. Kahdella erotuksella, esim. $a_i - a_j$ ja $a_k - a_p$ on siis sama jakojäännös. Mutta silloin $a_i + a_p \equiv a_k + a_j \bmod m$, vastoin oletusta.

87. Koska F on neljän muuttujan toisen asteen polynomi, se on muotoa

$$F(u,\,v,\,w,\,z) = a_{11}u^2 + a_{22}v^2 + a_{33}w^2 + a_{44}z^2 + a_{12}uv + a_{13}uw + a_{14}uz$$
$$+a_{23}vw + a_{24}vz + a_{34}wz + a_1u + a_2v + a_3w + a_4z + a.$$

Jos A_1 ja A_2 ovat kuten tehtävässä, niin $B_1 = (x_1,\,-y_1)$, $B_2 = (x_2,\,-y_2)$ ovat A_1:n ja A_2:n peilikuvat x-akselin suhteen; vastaavasti $C_1 = (-x_1,\,y_1)$, $C_2 = (-x_2,\,y_2)$ ovat A_1:n ja A_2 peilikuvat y-akselin suhteen ja $D_1 = (y_1,\,x_1)$, $D_2 = (y_2,\,x_2)$ A_1:n ja A_2:n peilikuvat suoran $y = x$ suhteen. Ehdon (a) perusteella $f(A_1,\,A_2) = f(B_1,\,B_2) = f(C_1,\,C_2) = f(D_1,\,D_2)$. On siis voimassa

$$F(x_1,\,y_1,\,x_2,\,y_2) = F(x_1,\,-y_1,\,x_2,\,-y_2), \tag{1}$$

$$F(x_1,\,y_1,\,x_2,\,y_2) = F(-x_1,\,y_1,\,-x_2,\,y_2), \tag{2}$$

$$F(x_1,\,y_1,\,x_2,\,y_2) = F(y_1,\,x_1,\,y_2,\,x_2). \tag{3}$$

Kaavasta (1) seuraa

$$2a_{12}x_1y_1 + 2a_{14}x_1y_2 + 2a_{23}x_2y_1 + 2a_{34}x_2y_2 + 2a_2y_1 + 2a_4y_2 = 0.$$

Sijoitetaan tähän ensin $x_1 = y_2 = 1$, $x_2 = y_1 = 0$ ja sitten $x_1 = -1$, $y_2 = 1$, $x_2 = y_1 = 0$, jolloin saadaan yhtälöt $a_{14} + a_4 = 0$, $-a_{14} + a_4 = 0$ ja edelleen $a_{14} = a_4 = 0$. Yhtälöstä (2) saadaan tämän jälkeen samoin $a_{12} = a_{23} = a_{34} = a_1 = a_2 = a_3 = 0$. Yhtälö (3) on nyt

$$(a_{11} - a_{22})(x_1^2 - y_1^2) + (a_{33} - a_{44})(x_2^2 - y_2^2) + (a_{13} - a_{24})(x_1x_2 - y_1y_2) = 0,$$

josta $a_{11} = a_{22}$, $a_{33} = a_{44}$ ja $a_{13} = a_{24}$. Polynomi F on siis

$$F(x_1,\,y_1,\,x_2,\,y_2) = a_{11}(x_1^2 + y_1^2) + a_{33}(x_2^2 + y_2^2) + a_{13}(x_1x_2 + y_1y_2) + a$$

Mielivaltaisille pisteille A_1, A_2 pätee siis

$$f(A_1,\,A_2) = \alpha OA_1^2 + \beta OA_2^2 + \gamma\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OA_2} + \delta = \alpha OA_1^2 + \beta OA_2^2 + \gamma OA_1 \cdot OA_2 \cdot \cos\phi + \delta.$$

Ehdon (c) perusteella on olemassa ϕ siten, että edellisen kaavan lauseke on nolla aina kun vektorien $\overrightarrow{OA_1}$ ja $\overrightarrow{OA_2}$ välinen kulma on ϕ, riippumatta vektorien pituudesta. Tämä voi toteutua vain, jos $\alpha = \beta = \delta = 0$. Siis

$$f(A_1,\,A_2) = \gamma\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OA_2}.$$

Vihdoin ehto (d) pakottaa γ:n olemaan $= 1$.

88. Jos joukossa S on n pistettä, niin näillä pisteillä on $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ yhdistysjanaa. Näistä ainakin $\frac{3n}{2}$ on yksikön pituisia. On oltava $\frac{n(n-1)}{2} \geq \frac{3n}{2}$ eli $n \geq 4$. Jos $n = 4$, on kaikkien S:n pisteiden välimatka 1. Tämä on mahdotonta, koska S on tasojoukko. Olkoon $n = 5$. Jos jokaisen S:n pisteen ympärillä on tasan kolme pistettä, jotka ovat etäisyydellä 1 ensin mainitusta pisteestä, ykkösen pituisia janoja on $\frac{5 \cdot 3}{2}$, mikä on mahdotonta. Ainakin yksi piste A sijaitsee siis niin, että neljä muuta ovat 1-säteisellä ympyrällä, jonka keskipiste on A. Helposti nähdään, että muut neljä pistettä ovat A-keskisen säännöllisen kuusikulmion vierekkäisiä kärkiä. Kärjistä ne kaksi, jotka ovat ympyrän halkaisijan päätepisteitä, eivät ole etäisyydellä 1 kolmesta muusta pisteestä. On siis oltava $n \geq 6$. Tapauksessa $n = 6$ saadaan toimiva konfiguraatio esim. liittämällä yksikköneliön neljään kärkeen neliön kahdelle vastakkaiselle sivulle piirrettyjen tasasivuisten kolmioiden kärjet; toinen kolmio piirretään neliön ulkopuolelle, toinen sisäpuolelle. Tapauksessa $n = 7$ lähdetään vinoneliöstä $ABCD$, jossa $AB = BC = 1$. Kierretään vinoneliötä A:n ympäri asentoon $AFEG$ niin, että $DE = 1$. Jos nyt vinoneliötä $AFEG$ kierretään E:n ympäri asentoon $A'F'EG'$ niin, että $AA' = 1$, saadaan tapauksessa $n = 8$ toimiva konfiguraatio. Tehtävän ehdon täyttävästä joukosta, jossa on n pistettä, saadaan aina $n + 3$:n pisteen joukko lisäämällä kuvioon vinoneliö, jonka pitemmän lävistäjän toinen kärki yhtyy johonkin kuvion kärkeen ja jonka pitemmän lävistäjän toinen kärki on etäisyydellä 1 jostain alkuperäisen kuvion pisteestä. Siis kaikilla $n \geq 6$ tehtävän ehdon täyttävä joukko voidaan konstruoida.

89. Olkoon P mielivaltainen tason piste ja olkoon $M = PA_1A_2 \ldots A_{n-1}$ säännöllinen n-kulmio. Olkoon $M_k = PA_{1k}A_{2k} \ldots A_{n-1,k}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, monikulmio, joksi M kuvautuu, kun tasoa kierretään P:n ympäri kulman $k \cdot \frac{2\pi}{n}$ verran. Koska jokainen M_k on säännöllinen n-kulmio, on

$$nf(P) + \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} f(A_{ik}) = 0.$$

Mutta jokainen $A_{i0}A_{i1} \ldots A_{i,n-1}$ on myös säännöllinen n-kulmio, joten

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} f(A_{ik}) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} f(A_{ik}) = 0.$$

Siis $nf(P) = 0$ ja $f(P) = 0$. Koska P on mielivaltainen, f on identtisesti 0.

90. Osoitetaan, että suurin tehtävän ehdon täyttävä n on 9. Tarkastellaan lukuja $x_i = 2^{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, 9$. Silloin

$$|\varepsilon_1 x_1 + \varepsilon_2 x_2 + \ldots + \varepsilon_9 x_9| \leq 1 + 2 + 4 + \ldots + 2^8 = 2^9 - 1 = 511 < 9^3 = 729.$$

Jos nyt $9^3 | \varepsilon_1 + \varepsilon_2 2 + \ldots + \varepsilon_9 2^8$, niin $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 2 + \ldots + \varepsilon_9 2^8 = 0$. Koska summa on parillinen, $\varepsilon_1 = 0$. Siis $9^3 | \varepsilon_2 + \varepsilon_3 2 + \ldots + \varepsilon_9 2^7$, josta seuraa kuten edellä $\varepsilon_2 = 0$. Samoin jatkamalla saadaan $\varepsilon_i = 0$, $i = 3, \dots 9$. Luku 9 toteuttaa tehtävän ehdon. Olkoon sitten $n \ge 10$. Koska $2^n > n^3$. (Induktiotodistus: $2^{10} = 1024 > 10^3$, jos $2^n > n^3$, ja $n \ge 10$, niin $2^{n+1} > 2n^3 > n^3 + n \cdot n^2 > n^3 + 7n^2 > n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = (n+1)^3$) Olkoon $A = \{x_i,$ $x_2, \dots, x_n\}$ joukko, jossa on n alkiota. Koska A:n epätyhjien osajoukkojen lukumäärä on $2^n - 1 > n^3$, A:lla on ainakin kaksi osajoukkoa, joiden alkioiden summa on sama $\bmod n^3$. Jos näistä osajoukoista poistetaan niiden mahdolliset yhteiset alkiot, saadaan A:lle kaksi yhteisalkiotonta osajoukoa B ja C, joiden alkioiden summa on sama. Siis

$$\sum_{x_i \in B} x_i - \sum_{x_i \in C} x_i \equiv 0 \bmod n^3.$$

Mutta tämä tarkoittaa, että on olemassa luvut $\varepsilon_i \in \{-1, 0, 1\}$, eivät kaikki nollia, siten, että

$$n^3 | \sum_{x \subset \in A} \varepsilon_i x_i.$$

Mikään $n \ge 10$ ei siis toteuta tehtävän ehtoa.

91. Merkitään $\cos n\pi x = \alpha_n$, $\cos n\pi y = \beta_n$. Silloin $2\alpha_n^2 = \alpha_{2n} + 1$, $2\beta_n^2 = \beta_{2n} + 1$ (kaksinkertaisen kulman kosinin kaava) ja

$$(\alpha_n + \beta_n)^2 + (\alpha_n - \beta_n)^2 = 2(\alpha_n^2 + \beta_n^2) = 2 + (\alpha_{2n} + \beta_{2n}).$$

Koska luvuilla $\alpha_n + \beta_n$ (ja siis myös luvuilla $\alpha_{2n} + \beta_{2n}$) on vain äärellisen monta eri arvoa, myös luvuilla $\alpha_n - \beta_n$ on äärellisen monta eri arvoa. Koska

$$\alpha_n = \frac{1}{2}\left((\alpha_n + \beta_n) + (\alpha_n - \beta_n)\right)$$
$$\beta_n = \frac{1}{2}\left((\alpha_n + \beta_n) - (\alpha_n - \beta_n)\right),$$

luvut α_n ja β_n saavat äärellisen monta eri arvoa. Siis $\alpha_n = \alpha_m$ eli $\cos n\pi x = \cos m\pi x$ joillain $m \ne n$. Siis $n\pi x = m\pi x + 2k\pi$ tai $n\pi x = -m\pi x + 2k\pi$ jollain k. Siis

$$x = \frac{2k}{n \pm m} \in \mathbb{Q}.$$

Samoin todistetaan, että $y \in \mathbb{Q}$.

92. Käytetään seuraavia merkintöjä. E, F, G ja H ovat kaarien AB, BC, CD ja DA keskipisteet, A', B', C' ja D' ovat kolmioiden BCD, CDA, DAB ja ABC sisään piirreettyjen ympyröiden keskipisteet, A_B on kolmion BCD sen sivuympyrän, joka sivuaa CD:tä ja säteitä BC ja BD, keskipiste. Vastaavasti määritellään muut 12 pistettä X_Y, missä $X, Y \in \{A, B, C, D\}$, $X \ne Y$. Osoitetaan, että joukoiksi K ja L voidaan valita $K = \{A'B', C'D', A_BB_A, C_DD_C\}$ ja $L = \{A'D', B'C', B_CC_B, A_DD_A\}$. Todistus perustuu osin aputuloksiin, joilla on itsenäisestäkin merkitystä. Piirrä kuvat!

Aputulos 1. $EG \perp FH$. **Todistus.** Olkoon J EG:n ja FH:n leikkauspiste. Kehäkulmia GEH ja FHE vastassa olevat kaaret ovat yhteensä tasan puolet kaarista AB, BC, CD ja DA eli koko ympyrästä. Siis $\angle JEH + \angle JHE = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 360°$ ja $\angle EJH = 90°$. $\Box$

Aputulos 2. $FD' = FD_A = FB = FC$. **Todistus.** A, D', F ja D_A ovat samalla suoralla. Kolmion BAD' kulman $BD'A$ vieruskulmana $\angle BD'F = \angle BAF + \angle ABD' = \angle BAF + \frac{1}{2}\angle ABC$. Mutta myös $\angle FBD' = \angle FBC + \angle CBD' = \angle FAC + \frac{1}{2}\angle ABC \angle BAF + \frac{1}{2}\angle ABC$. Kolmio FBD' on tasakylkinen, joten $FD' = FB (= FC)$. Kolmio $D'BD_A$ on suorakulmainen (kulma $D'BD_A$ puolet kahdesta kulmasta, joiden summa on oikokulma), joten $\angle FBD_A = 90° - \angle D'BF = 90° - \angle FD'B = \angle FD_AB$. Kolmio FBD_A on tasakylkinen eli $FD_A = FB$. $\Box$ Vastaava tulos pätee muille tehtävän kolmioille; erityisesti esim. D', D_B, A ja C ovat yhtä etäällä kaaren CDA keskipisteestä jne.

Aputulos 3. $A'B'C'D'$ on suorakulmio. **Todistus.** Aputulos 2 sovellettuna kolmioon BDC antaa $FA' = FC = FD'$. F on siis janan $A'D'$ keskinormaalilla. Mutta $\angle D'FH = \angle A'FH$, joten kolmiot $D'FH$ ja $A'FH$ ovat yhteneviä (ssk). Siis $D'H = A'H$, joten myös H on $A'D'$:n keskinormaalilla. Samoin nähdään, että HF on myös $B'C'$:n keskinormaali. Siis $A'D' \| C'B'$. Samoin $A'B' \| C'D'$. Koska $FH \perp EG$, $A'D' \perp A'B'$. $\Box$

Aputulos 4. $A'D'A_DD_A$ on suorakulmio. **Todistus.** Aputuloksen 2 perusteella nelikulmion $A'D'A_DD_A$ lävistäjät ovat yhtä pitkät ja puolittavat toisensa. $\Box$

Aputuloksen 4 perusteella pisteet D_A ja C_B ovat suoralla $A'B'$, pisteet A_D ja B_C suoralla $D'C'$, pisteet A_B ja D_C suoralla $C'B'$ ja pisteet B_A ja C_D suoralla $D'A'$. Lisäksi suorat A_BB_A ja C_DD_C ovat $A'B'$:n ja $C'D'$:n suuntaisia ja suorat B_CC_B ja A_DD_A suorien $A'D'$ ja $B'C'$ suuntaisia. Väite tulee todistetuksi, kun osoitetaan, että A_BB_A ja B_CC_B leikkaavat pisteessä D_B

Aputulos 5. Janan B_CB_A keskipiste on kaaren CDA keskipiste P. **Todistus.** B_C, D ja B_A ovat kolmion ACD kulman D vieruskulmien yhteisellä puolittajasuoralla. Jos B_CB_D leikkaa kaaren CDA pisteessä P', niin (olettaen, että $P' \in DB_A$) $\angle CDP' = \frac{1}{2}(\angle DAC + \angle ACD)$, joten kaari CP' on puolet kaaresta CDA. Siis $P' = P$. Olkoon P'' B_CB_A:n keskipiste. Koska kolmiot B_CAB_A ja B_CCB_A ovat suorakulmaisia, $P''A = P''C = \frac{1}{2}B_AB_C$. Siis P'' on janan AC keskinormaalilla. Tämä keskinormaali leikkaa kaaren CDA pisteessä P. Koska $P \in B_CB_A$, on oltava $P'' = P$. $\Box$

Aputuloksen 5 ja aputuloksen 2 jälkeen tehdyn huomautuksen perusteella B_AB_C ja $D'D_B$ ovat yhtä pitkät ja puolittavat toisensa leikkauspisteessään P. Näin ollen $B_CD'B_AD_B$ on suorakulmio, joten D_B on suorilla B_AA_B ja B_CC_B. Vastaavat tulokset pätevät pisteille B_D, C_A ja A_C, joten todistus on valmis. [Romanian vuoden 1996 olympiavalinnassa neljä kilpailijaa ratkaisi tämän tehtävän.]

93. Olkoot C_1 ja C_2 ympyröiden ζ_1 ja ζ_2 keskipisteet olkoon C_2OC_1D suorakulmio. Olkoon K ζ_1:n ja ζ_2:n sivuamispiste. Tällöin C_1, K ja C_2 ovat samalla suoralla ja $C_1C_2 = R_1 + R_2$, missä R_i on ζ_i:n säde. Siis myös $OD = R_1 + R_2$. Jos R on ζ:n säde, niin $OC_1 = R - R_1$ ja $OC_2 = R - R_2$. KOlmioepäyhtälön nojalla $R_1 + R_2 = C_1C_2 < OC_1 + OC_2 = (R - R_1) + (R - R_2)$, joten $R_1 + R_2 < R$. Piste D on ζ:n sisällä. Leikatkoon OD ζ:n pisteessä H ja leikatkoot C_1D ζ_1:n E:ssä ja C_2D ζ_2:n F:ssä. Silloin $DE = DF = DH = R - (R_1 + R_2)$.

Näin ollen D on ζ_3:n keskipiste, $E = S$, $F = T$ ja $H = C$. Siis $\angle SCT = \angle EHF = 45°$.

94. $AOKC$, $BOKD$ ja $ABCD$ ovat jännenelikulmioita. Olkoon L AD:n ja BC:n leikkauspiste. Osoitetaan, että M on suoralla KL ja että $KL \perp OK$. Osoitetaan ensin, että myös $AKLB$ on jännenelikulmio. Kehäkulmalauseen ja kolmioiden OAC ja OBD tasakylkisyyden perusteella $\angle OKB = \angle ODB = \angle OBD$ ja $\angle AKO = \angle ACO = \angle CAO$. Siis $\angle AKB = \angle OBD + \angle OAC = \dfrac{1}{2}(\angle AOD + \angle COB) = 90° + \dfrac{1}{2}\angle COD$. Toisaalta $\angle ALB = 180° - (\angle DAO + \angle CBO) = 180° - \dfrac{1}{2}(180° - \angle COD) = 90° + \dfrac{1}{2}\angle COD$. $AKLB$ on siis jännenelikulmio. Tämän takia $\angle LKO = \angle LKA - \angle AKO = 180° - \angle LBO - \angle AKO = 180° - \dfrac{1}{2}(\angle AOC + \angle COB) = 90°$. Siis $OK \perp OL$. Osoitetaan, että $LKDC$ on jännenelikulmio: $\angle DKC = 360° - (\angle DKO + \angle CKO) = \angle DBO + \angle CAO = \dfrac{1}{2}(\angle AOD + \angle COB) = 90° + \dfrac{1}{2}\angle COD = \angle ALB = \angle CLD$. Pisteen M potenssi nelikulmioiden $AKLB$ ja $LKCD$ ympäri piirrettyjen ympyröiden $\mathcal{Y}_1$ ja $\mathcal{Y}_2$ suhteen on sama, sillä se on M:n potenssi ympyrän $ABDC$ suhteen. Siis M on $\mathcal{Y}_1$:n ja $\mathcal{Y}_2$:n radikaaliakselilla, joka puolestaan on ympyröiden leikkauspisteiden kautta kulkeva suora KL.

95. Olkoon

$$n = \left(\sqrt{50} + 7\right)^{2001} - \left(\sqrt{50} - 7\right)^{2001}$$

$$= \sum_{0}^{2001} \binom{2001}{k} \left((\sqrt{50})^k 7^{2001-k} - (\sqrt{50})^k (-7)^{2001-k}\right) = 2 \sum_{m=0}^{1000} \binom{2001}{k} (\sqrt{50})^{2m} 7^{2001-2m}.$$

n on kokonaisluku. Koska $7{,}1^2 = 50{,}41$, on $7 < \sqrt{50} < 7{,}1$. Siis $\sqrt{50} - 7 < 10^{-1}$ ja $(\sqrt{50} - 7)^{2001} < 10^{-2001}$. Mutta näin ollen $(\sqrt{50} + 7)^{2001} =$ kokonaisluku + luku, joka on alle 10^{-2001}. Kysytyt desimaalit ovat molemmat nollia.

96. Olkoot kolmion ABC sivujen pituudet a, b ja c. Voimme olettaa, että mediaani AD ja kulman puolittaja BE leikkaavat toisensa kohtisuorasti pisteessä P. Kolmiossa BDA on silloin BP sekä kulman puolittaja että korkeusjana. Kolmio BDP on tasakylkinen. Mutta silloin $a = 2c$. Koska $\{a, b, c\}$ on kolmen peräkkäisen kokonaisluvun joukko, $a - c$ on 1 tai 2. Jos $a - c = 1$, $c = 1$, $a = 2$, jolloin $b = 3$. Tällöin ABC ei ole kolmio. On siis oltava $a - c = 2c - c = 2$, $c = 2$, $a = 4$, $b = 3$.

97. Jos alkuperäisen kuution särmä on x ja $y \neq 1$ on osakuution särmä, niin x:n ja y:n on oltava muiden keskenään samankokoisten osakuutioiden särmän monikertoja eli x ja y ovat positiivisia kokonaislukuja. Lisäksi on oltava $x^3 - y^3 = 98$ eli $(x - y)(x^2 + xy + y^2) = 98 = 2 \cdot 7^2$. Koska $x - y < x^2 + xy + y^2$, on oltava $x - y = 2$, $x^2 + xy + y^2 = 49$ eli $y^2 + 4y + 4 + y^2 + 2y + y^2 = 3y^2 + 6y + 4 = 49$ eli $y^2 + 2y - 15 = 0$. Tämän yhtälön ainoa positiivinen ratkaisu on $y = 3$. Siis $x = 5$, ja K:n tilavuus on 125 yksikköä.

98. Luvuista n ja $n+1$ toinen on parillinen. Jos $n \equiv 2 \bmod 3$, niin $n+1$ on jaollinen 3:lla ja jos $n \equiv 1 \bmod 3$, niin $2n + 2002 \equiv 2004 \equiv 0 \bmod 3$. $n(n+1)(2n+2002)$ on siis aina jaollinen 12:lla. Tästä seuraa, että $d = 12k$, missä k on kokonaisluku. Jos $12k$ on tekijänä luvuissa $n(n+1)(2n+2002)$ ja $(n+1)(n+2)(2n+2004)$, se on tekijänä näiden lukujen erotuksessa, joka on $6(n+1)(n+668)$. $2k$ on siis tekijänä luvussa $(n+1)(n+668)$ kaikilla n erityisesti $2k$ on tekijänä luvuissa $(2k+1)(2k+668)$ ja $(2k+2)(2k+669)$. Koska $2k$:lla ja $2k+1$:llä ei ole yhteisiä tekijä, se on $2k+668$:n tekijä. Mutta $2k+668$:lla ja $2k+669$:llä ei ole yhteisiä tekijöitä, joten $2k$ on $2k+2$:n tekijä. Silloin $2k$ on luvun 2 tekijä, joten $k = 1$. Siis $d = 12$.

99. Olkoon A_i niiden A:n lukujen joukko, jotka ovat kongruentteja i:n kanssa modulo 42. Koska $547 = 13 \cdot 42 + 1$, A_1:ssä on 14 alkiota ja muissa joukoissa A_i on 13 alkiota. Jos A:n osajoukossa minkään kahden luvun summa ei ole jaollinen 42:lla, joukossa ei ole kahta lukua, joista toinen kuuluisi joukkoon A_i ja toinen joukkoon A_{41-i}. Joukossa ei myöskään ole kahta lukua, jotka molemmat kuuluisivat joukkoon A_0 tai A_{21}. Maksimaalisessa ehdot täyttävässä osajoukossa voi siis olla joukot A_1, A_2, $\ldots$, A_{20} ja yksi luku joukosta A_0 ja yksi luku joukosta A_{21}. Maksimaalinen alkiomäärä on $14 + 19 \cdot 13 + 2 = 263$.

100. Voimme olettaa, että D on kolmion ABC sisäpiste. Kehäkulmalauseen perusteella $\angle CAB = 180° - \angle ADC$ ja $\angle ABC = 180° - \angle CDB$. Olkoon R_C kolmion ABC ympäri piirretyn ympyrän säde. Sinilauseen nojalla kolmioista ADC ja ABC saadaan $AC = 2h\sin(\angle ADC) = 2h\sin(\angle CAB)$ ja $AC = 2R_C\sin(\angle ABC)$. Vastaavasti kolmioista CDB ja ABC saadaan $BC = 2k\sin(\angle CDB) = 2k\sin(\angle ABC)$ ja $BC = 2R_C\sin(\angle CAB)$. Kun yhtälöt $2h\sin(\angle CAB) = 2R_C\sin(\angle ABC)$ ja $2k\sin(\angle ABC) = 2R_C\sin(\angle CAB)$ kerrotaan keskenään, saadaan $R_C^2 = hk$. Olkoon R_D kolmion ABD ympäri piirretyn ympyrän säde. Nyt $\angle DAB = \angle DCA$ ja $\angle ABD = \angle BCD$. Kolmioista ADC ja ABD saadaan $AD = 2h\sin(\angle DCA = 2h\sin(\angle DAC) = 2R_D\sin(\angle ABD)$, kolmioista DBC ja ABD puolestaan $DB = 2k\sin(\angle BCD) = 2k\sin(\angle ABD) = 2R_D\sin(\angle DAB)$. Kun yhtälöt kerrotaan keskenään, saadaan $R_D^2 = hk$. Säteet R_C ja R_D ovat samat ja $= \sqrt{hk}$.

101. Aritmeettis-geometrisen epäyhtälön nojalla

$$1 = (\sqrt{a_1}\sqrt{a_2}\cdots\sqrt{a_n})^{1/n} \le \frac{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+\cdots+\sqrt{a_n}}{n}.$$

Cauchy–Schwarzin epäyhtälön nojalla

$$(\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+\cdots+\sqrt{a_n})^2 \le n(a_1+a_2+\cdots+a_n) \le (\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+\cdots+\sqrt{a_n})(a_1+a_2+\cdots a_n).$$

Väite saadaan tästä jakolaskulla.

102. Oletetaan, että seurueessa kukaan ei tunne kaikkia muita. Olkoon A eräs seurueen jäsen. Seurueessa on silloin ainakin yksi jäsen B, joka ei ole tuttu A:lle. Olkoot C ja D kaksi muuta seurueen jäsentä. Joukossa $\{A, B, C, D\}$ on ainakin yksi, joka tuntee muut kolme. Tämä yksi ei ole A eikä B, joten se on C tai D. Joka tapauksessa C ja D tuntevat toisensa. Koska C ja D ovat mielivaltaisia, tiedetään, että jos A ja B poistetaan seurueesta, kaikki muuta jäsenet tuntevat toisensa. Mutta joko C tai D tunsi sekä A:n että B:n ja niin muodoin kaikki seurueen jäsenet. Ristiriita, joka osoittaa alkuperäisen oletuksen virheelliseksi.

103. Olkoot juustonpalojen painot $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_{2001}$. Valitaan palat $a_1, a_3, \ldots, a_{1999}$ toiseen säkkiin ja palat $a_2, a_4, \ldots, a_{2000}$ toiseen. Säkkien painon erotus on

$$\sum_{k=1}^{1000}(a_{2k} - a_{2k-1}) = a_{2000} - \sum_{k=1}^{999}(a_{2k+1} - a_{2k}) - a_1 \le a_{2000} - a_1 < a_{2000} \le a_{2001}.$$

Mutta näin ollen pala a_{2001} voidaan leikata kahdeksi palaksi, joiden painojen erotus on sama kuin säkkien painojen erotus. Kun raskaampi pala pannaan kevyempään säkkiin ja kevyempi raskaaseen, molemmat säkit tulevat yhtä painaviksi.

104. Tehtävän mukaan $P(x) = a_n x(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_n)$, missä a_n on kokonaisluku. Osoitetaan, että $P(k) \ne x_i$ kaikilla $i \ge 2$ ja kaikilla kokonaisluvuilla k. Vastaoletukseksi voidaan asettaa $P(k) = x_2$ jollain kokonaisluvulla k. Silloin k on x_2:n tekijä, eli $x_2 = kt$ jollain kokonaisluvulla t. Edelleen silloin $a_n k(1-t)(k-x_3)\cdots(k-x_n) = t$, joten $1-t$ on t:n tekijä. Silloin joko $t = 0$ tai $t = 2$. Jos $t = 0$, $x_2 = 0$, mikä ei ole tehtävän ehtojen mukaan mahdollista. Siis $t = 2$ ja $a_n k(k-x_3)(k-x_4)\cdots(k-x_n) = -2$. Luvut k, $k-x_3$, $k-x_4$, $\ldots$, $k-x_n$ ovat kaikki eri lukuja ja luvun -2 tekijöitä. Koska viimeinen ehto toteutuu vain, kun luvut kuuluvat joukkoon $\{-2, -1, 1, 2\}$, on oltava $n = 5$ ja $|a_n k(k-x_3)(k-x_4)(k-x_5)| \ge 4$. Ristiriita. Siis $P(x) \ne x_i$, joten $P(P(x)) = 0$ vain, kun $P(x) = 0$ eli x on jokin P:n nollakohdista 0, x_i.

105. Mitataan kulmat asteissa. x:ssä minuutissa minuuttiosoitin kiertyy kulman $6x$ ja tuntiosoitin (jonka kiertonopeus $\frac{1}{12}$ minuuttiosoittimen kiertonopeudesta) kulman $\frac{1}{2}x$. Olkoot osoittimet päällekkäin x minuuttia yli kello viiden. Koska klo 5.00 minuuttiosoittimen ja pystysuoran välinen kulma on $0°$, ja tuntiosoittimen ja pystysuoran välinen kulma on $150°$, niin $6x = 150 + \frac{1}{2}x$, josta $x = \frac{300}{11} = 27\frac{3}{11}$.

106. Yhtälöllä on ratkaisuja kolmessa eri tapauksessa, joko silloin, kun $x^2 - 5x + 5 = 1$, tai silloin, kun $x^2 - 5x + 5 = -1$ ja $x^2 - 11x + 30$ on parillinen kokonaisluku, tai silloin, kun $x^2 - 11x + 30 = 0$ ja $x^2 - 5x + 5 \ne 0$. Ensimmäinen vaihtoehto toteutuu, kun $x = 1$ tai $x = 4$. Yhtälön $x^2 - 5x + 5 = -1$ juuret ovat 2 ja 3; Koska $x^2 - 11x + 30 = x(x-1) + 10(x+3)$ selvästi saa kaikilla kokonaisluvuilla parillisen arvon, 2 ja 3 ovat ratkaisuja. Yhtälö $x^2 - 11x + 30 = 0$ toteutuu, kun $x = 5$ tai $x = 6$; näillä x:n arvoilla $x^2 - 5x + 5 \ne 0$. Vastaus tehtävän kysymykseen on siten 6.

107. Olkoon pikkukuutioiden lukumäärä n^3. Kokonaan valkoisia pikkukuutioita on $n^3 - 168$, ja nämä muodostavat suuntaissärmiön, jonka mitat ovat $a \times b \times c$, missä $n-2 \le a \le n$, $n-2 \le b \le n$ ja $n-2 \le c \le n$ (vain alkuperäisen kuution ulkopintaan rajoittuvat pikkukuutiot ovat voineet saada punaista väriä). Koska $n^3 \ge 168$, $n > 5$. Ei voi olla $n = 6$, koska $6^3 - 168 = 48$, mutta vlkoisten kuutioiden määrä on ainakin $(6-2)^3 = 64$. Jos $n = 7$, niin $n^3 - 168 = 175 = 5 \cdot 5 \cdot 7$. On mahdollista, että ison kuution neljä sivutahkoa on maalattu; tällöin valkoisia kuutioita on 175. Koska $8^3 - 168 = 344 = 2^3 \cdot 43$ ja $9^3 - 168 = 561 = 3 \cdot 11 \cdot 17$, ratkaisut $n = 8$ tai $n = 9$ eivät ole mahdollisia. Jos $n = 10$, maalattujen kuutioiden määrä on 100 (vain yksi sivutahko maalattu) tai ainakin 190 (kaksi vierekkäistä tahkoa maalattu). Jos $n = 11$ tai $n = 12$, maalattujen tahkojen määrät ovat 121 tai ainakin 231 tai bastaavasti 144 tai ainakin 276. Jos $n \geq 13$, maalattuja tahkoja on ainakin 169. Ainoa ratkaisu on siis tapauksen $n = 7$ ratkaisu.

108. Olkoon $n^2 = \overline{abccba} = (10^5 + 1)a + (10^4 + 10)b + (10^3 + 10^2)c = 11((10^4 + 10^3 + 10^2 010^1 + 1)a + (10^2 + 10 + 1)b + 10^2 c)$, $a \neq 0$. Pienin luku, jonka neliö on kuusinumeroinen, on 317. Luku on jaollinen Neliöluvun viimeisenä numerona a voi olla 1, 4, 5, 6 tai 9. Jos $a = 1$, $n \leq 447$, ja n on 1:een tai 9:ään päättyvä 11:llä jaollinen luku. Mahdollisisa n:n arvoja ovat $n = 341$, $n = 319$ ja $n = 429$. Millään näistä n^2 ei ole palindromi. Jos $a = 4$, niin $633 \leq n \leq 707$. n päättyy 2:een tai 8:aan ja on jaollinen 11:llä. Mahdollisia n:n arvoja ovat 682 ja 638. Kummallakaan n^2 ei ole palindromi. Jos $a = 5$, $708 \leq n \leq 774$ ja n päättyy 5:een. Ainoa mahdollisuus on $n = 715$, mutta nytkään n^2 ei ole palindromi. Jos $a = 6$, $775 \leq n \leq 836$ ja n päättyy 4:ään tai 6:een. Mahdolliset kandidaatit ovat $n = 814$ ja $n = 836$. Havaitaan, että 814 ei kelpaa, mutta että $836^2 = 698896$. Jos $a = 9$, niin $n \geq 949$. Ainoa kandidaatti on $n = 957$, mutta 957^2 ei ole palindromi. Ainoa ratkaisu on $n = 836$.

109. Olkoon kolmion ala A ja tuntematon korkeusjana n. Kolmion sivut ovat $\frac{2A}{9}$, $\frac{2A}{29}$ ja $\frac{2A}{n}$. Kolmioepäyhtälön nojalla

$$\frac{2A}{29} + \frac{2A}{n} > \frac{2A}{9}, \qquad \frac{2A}{9} + \frac{2A}{29} > \frac{2A}{n}.$$

Siis

$$\frac{1}{9} - \frac{1}{29} < \frac{1}{n} < \frac{1}{9} + \frac{1}{29}.$$

Tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että

$$\frac{9 \cdot 29}{38} < n < \frac{9 \cdot 29}{20}.$$

Koska n on kokonaisluku, on oltava $7 \leq n \leq 13$. Tehtävän sanamuoto on hiukan monitulkintainen, mutta täydellinen ratkaisu edellyttää, että tutkitaan, onko esitetty ehto myös riittävä. Tässä tapauksessa näin on, koska ehto $7 \leq n \leq 13$ takaa, että on olemassa kolmio, jonka sivut ovat $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{29}$ ja $\frac{1}{n}$; tällaista kolmiota suurentamalla löytyy kolmio, jonka korkeusjanat ovat 9, 29 ja n.

110. On osoitettava, että kolmio BAD on tasakylkinen. Tähän riittää, kun osoitetaan, että $\angle BAD = \angle BDA$. Kolmion kulman vieruskulmalauseen perusteella $\angle BDA = \angle DCA + \angle DAC$. Olkoon O ympyrän $\mathcal{C}_1$ keskipiste. Sovelletaan kehä- ja keskuskulmalausetta ympyrään $\mathcal{C}_1$; sen mukaan $\angle AOC = 2(\angle DCA + \angle DAC)$. Mutta kun katsotaan kehäkulmalausetta ympyrän $\mathcal{C}_2$ kannalta, saadan $\angle AOC = \angle DCA + \angle BAD + \angle DAC$. Siis todellakin $\angle BDA = \angle DCA + \angle DAC = \angle BAD$.

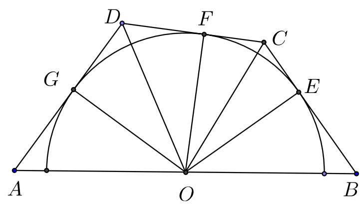
111. Jos luku 5^n alkaa ykkösellä, niin $5^n = a \cdot 10^k$, missä $1 < a < 2$ eli $1 < \dfrac{2}{a} < 2$ ja $n > k$. Silloin $2^{n+1} \cdot 5^n = 2 \cdot 10^n$, joten $2^{n+1} = \dfrac{2}{a}10^{n-k}$. Siis 2^{n+1} alkaa ykkösellä. Olkoon $2^{n+1} = b \cdot 10^m$, $1 < b < 2$ eli $1 < \dfrac{2}{b} < 2$. Silloin $10^n = 2^n \cdot 5^n > 2^{n+1} > 10^m$, joten $m < n$. Lisäksi $2 \cdot 10^n = b \cdot 10^m \cdot 5^n$, joten $5^n = \dfrac{2}{b}10^{n-m}$, ja 5^n alkaa ykkösellä.

112. Kahden kärkipisteparin etäisyys on sama jos ja vain jos niiden välisten kaarien pituus on sama. Valitaan kärjet A_0, A_1, A_4, A_{14} ja A_{16}. Valitaan mittayksikkö niin, että kaaren A_0A_1 pituus $k(A_0A_1) = 1$. Silloin $k(A_0A_4) = 4$, $k(A_0A_{14} = 7$, $k(A_0A_16) = 5$, $k(A_1A_4) = 3$, $k(A_1A_14) = 8$, $k(A_1A_{16}) = 6$, $k(A_4A_{14}) = 10$, $k(A_4A_16) = 9$ ja $k(A_{14}A_{16}) = 2$. Kaikki 10 kärkipisteiden yhdysjanaa ovat eripituisia.

113. Nelikulmio on jännenelikulmio, jos ja vain jos sen vastakkaisten kulmien summa on $180°$. Tästä ja tehtävän oletuksista seuraa, että nelikulmiot $SAUE$ ja $UBVE$ ovat jännenelikulmioita. Kun sovelletaan kehäkulmalausetta näiden nelikulmioiden ympäri piirrettyihin ympyröihin ja käytetään hyväksi tietoa, jonka mukaan $\angle AEB = 90°$, saadaan $\angle ESU = \angle EAU = 90° - \angle EBU = 90° - \angle EVU$. Aivan samalla tavalla nähdään, että $\angle EST = 90° - \angle EVT$. Mutta laskemalla nämä yhtälöt yhteen saadaan heti $\angle TSU = 180° - \angle TVU$. Siis $UVTS$ on jännenelikulmio.

114. Koska viidellä jaottomat luvut ovat muotoa $5n \pm 1$ ja $5n \pm 2$, tällaisten lukujen toiset potenssit ovat muotoa $5p + 1$ ja $5p + 4$ eli muotoa $5q \pm 1$. Näin ollen kahden viidellä jaottoman neliöluvun summa on joko viidellä jaollinen tai muotoa $5r \pm 2$, ja tällaisena luku, joka ei voi olla neliöluku. Luvut x ja y eivät voi molemmat olla viidellä jaollisia, koska tällöin z:kin olisi, ja luvuilla olisi yhteinen tekijä. Jos luvuista x, y toinen on viidellä jaollinen ja toinen jaoton, niin $x^2 + y^2$ ei tietenkään ole viidellä jaollinen. Jos luvut x ja y ovat molemmat viidellä jaottomia ja $x^2 + y^2$ on neliöluku, niin tämän neliöluvun z^2 ja siis myös luvun z täytyy olla viidellä jaollinen.

115. Olkoon puoliympyrän ja AD:n sivuamispiste G, puoliympyrän ja CD:n sivuamispiste F ja puoliympyrän ja BC:n sivuamispiste E. Kolmiot AOG ja BOE ovat yhteneviä. Siis $\angle OAG = \angle OBE$ ja $\angle AOG = \angle BOE$. Nyt $\angle ECO = 90° - \angle EOC$. Mutta $\angle GOD = \angle GOF$ ja $\angle FCO = \angle EOC$ ja $2(\angle AOG + \angle GOD + \angle EOC) = 180°$. Siis $\angle ECO = 90° - (90° - \angle AOG - \angle GOD) = \angle AOG + \angle GOD = \angle AOD$. Kolmioissa AOD ja BCO on kaksi yhtä suurta kulmaa, joten ne ovat yhdenmuotoisia. Mutta silloin



$$\frac{AO}{AD} = \frac{CB}{OB},$$

mikä on yhtäpitävää väitteen kanssa.

116. Kun tehtävän epäyhtälöön sijoitetaan $x = 1$, $x = -1$ ja $x = 0$, saadaan $|a_2+a_1+a_0| \leq 1$, $|a_2 - a_1 + a_0| \leq 1$ ja $|a_0 \leq 1$. Kolmioepäyhtälöstä saadaan $|2a_2| = |2a_2 + a_1 - a_1 + 2a_0 - 2a_0| = |(a_2+a_1+a_0)+(a_2-a_1+a_0)-2a_0| \leq |a_2+a_1+a_0|+|a_2-a_1+a_0|+2|a_1| \leq 1+1+2 = 4$. Siis $|a_2| \leq 2$.

117. Janan keskipisteen x (tai y-)koordinaatti on kokonaisluku, jos janan päätepisteiden x- (tai y-)koordinaattien summa on parillinen. , ja tämä puolestaan toteutuu jos molemmat x- (tai y-)koordinaatit ovat parillisia tai molemmat parittomia. Pisteen koordinaateilla on neljä mahdollisuutta: (parillinen, parillinen), (parillinen, pariton), (pariton, parillinen), (pariton, pariton). Viiden pisteen joukossa ainakin jokin tyypeista esiintyy kahdesti; jana jonka päätepisteinä ovat nämä pisteet, on sellainen, jonka keskipisteen koordinaatit ovat kokonaislukuja.

118. Todistettava epäyhtälö on

$$na_1 - (n+1)a_2 + na_3 - \cdots + na_{2n-1} - (n+1)a_n + na_{2n+1} = 0. \tag{1}$$

Kirjoitetaan oletusepäyhtälöt muotoon

$$\begin{aligned} t_1(a_1 - 2a_2 + a_3) &\geq 0 \\ t_2(a_2 - 2a_3 + a_4) &\geq 0 \\ &\vdots \\ t_{2n-1}(a_{2n-1} - 2a_{2n}) &\geq 0 \end{aligned}$$

ja valitaan kertoimet t_i niin, että yhtälöt yhteen laskemalla saadaan (1). Tällöin on valittava $t_1 = n$, $t_2 = n-1$, $t_3 = 2(n-1)$, $t_4 = 2(n-2)$ jne. Päätellään, että onn valittava $t_{2i-1} = i(n-i+1)$, $t_{2i} = i(n-i)$. Tämä toimii: jos $1 < i < n$, a_{2i-1}:n kerroin on $t_{2i-3} - 2t_{2i-2} + t_{2i-1} = (i-1)(n-i+2) - 2(i-1)(n-i+1) + i(n-i+1) = n$ ja a_{2i}:n kerroin on $t_{2i-2} - 2t_{2i-1} + t_{2i} = (i-1)(n-i+1) - 2i(n-i+1) + i(n-i) = -(n+1)$. Lisäksi a_{2n}:n kerroin on $t_{2n-2} - 2t_{2n-1} = (n-1)(n-n+1) - 2n(n-n+1) = -(n+1)$ ja a_{2n+1}:n kerroin on $t_{2n-1} = n$.

119. Rakennetaan polynomi, jotka saa pisteessä x_k arvon 1 ja pisteissa $x_j \neq x_k$ arvon 0. Tällaiseksi käy astetta 2002 oleva polynomi

$$Q_k(x) = \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_{2002})}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_{2002})}.$$

Kun $Q_k(x)$ kirjoitetaan x:n polynomien mukaan tavanomaiseen polynomimuotoon, sen kaikki kertoimet ovat rationaalilukuja. Nyt polynomi

$$R(x) = P(x_0)Q_0(x) + P(x_1)Q_1(x) + \cdots + P(x_{2002})Q_{2002}(x)$$

saa 2003:ssa pisteessä saman arvon kuin $P(x)$. Näiden polynomien erotus on enintään astetta 2002 ja sillä on 2003 nollakohtaa. Se on silloin nollapolynomi, joten $P(x) = R(x)$. Jos kaikki luvut $P(x_k)$ olisivat rationaalisia, olisivat R:n ja siis P:n kaikki kertoimet rationaalisia. Koska a_{592} on irrationaalinen, on ainakin yhden $P(x_k)$:n oltava irrationaalinen. [Ratkaisussa konstruoitu polynomi $R(x)$ on *Lagrangen interpolaatiopolynomi*: polynomi, joka saa annetuissa pisteissä x_i annetut arvot y_i.]

120. Olkoon p_n kysyttyjen permutaatioiden määrä. Selvästikin $p_1 = 0$ ja $p_2 = 1$. Olkoon $n \geq 3$. Tarkastellaan tehtävän ehdon mukaisia permutaatioita. Näistä sellaisia, joilla $a_n = n$ on yhtä monta kuin ehdon täyttäviä $n-1$:n alkion jonon permutaatioita, siis p_{n-1} kappaletta. Tarkastellaan sitten sellaisia permutaatioita, joissa $a_i = n$, $1 \leq i \leq n-1$. Luvuiksi $a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}$ voidaan valita mitkä hyvänsä $i-1$ luvuista $1, 2, \ldots, n-1$, mutta ne on asetettava suuruusjärjestykseen. Samoin loput luvut ovat suuruusjärjestyksessä asemissa $a_{i+1}, \ldots, a_n$. Näin ollen ehsolla $a_i = n$ on tasan $\binom{n-1}{i-1}$ tehtävän ehdon täyttävää permutaatiota. Siis

$$p_n = p_{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-1}{i-1} = p_{n-1} + 2^{n-1} - 1.$$

Mutta tästä seuraa

$$p_n = (2^{n-1} - 1) + (2^{n-2} - 1) + \cdots + (2 - 1) = 2^n - 1 - n.$$

121. Johtokunnassa on joko parillinen tai pariton määrä jäseniä ja joka kerta kun johtokunnan koostumus muuttuu, parillinen määrä muuttuu parittomaksi tai pariton parittomaksi. Jos kaikki mahdolliset johtokuntien kokoonpanot käydään läpi eikä sama johtokunnan kokoonpano toistu kahdesti, niin parillisten ja parittomien johtokuntien lukumäärien ero on enintään 1. Mutta parillisten ja parittomien kokoonpanojen lukumäärien ero on tosiasiassa

$$\left(\binom{11}{4} + \binom{11}{6} + \cdots + \binom{11}{10}\right) - \left(\binom{11}{3} + \binom{11}{5} + \cdots + \binom{11}{11}\right)$$
$$= \sum_{k=0}^{11} (-1)^k \binom{11}{k} - \binom{11}{0} + \binom{11}{1} - \binom{11}{2} = (1-1)^{11} - 1 + 11 - 55 = -45.$$

Kaikkia johtokunnan mahdollisia kokoonpanoja ei pystytä annetuin säännöin saamaan aikaan.

122. Olkoon sievennettävä luku x. Merkitään

$$y = 1 + \frac{1 + \ldots}{3 + \ldots}.$$

Silloin $y = 1 + \dfrac{y}{x}$ eli $y = \dfrac{x}{x-1}$. Näin ollen

$$x = 3 + \frac{\dfrac{x}{x-1} + 4}{x - 2},$$

mistä sievennetään $x^3 - 6x^2 + 6x - 2 = 0$. Kolmannen asteen yhtälön ratkaisemiseksi asetetaan $x = z + 2$. Sijoituksen jälkeen yhtälö on $z^3 - 6z - 6 = 0$. Sijoitetaan vielä $z = t + \dfrac{2}{t}$. Yhtälöstä tulee nyt tuntemattoman t^3 toisen asteen yhtälö $t^3 + \dfrac{8}{t^3} - 6 = 0$, jonka juuret ovat $t^3 = 3 \pm 1$. Voidaan valita juurista toinen, esim. $t^3 = 2$, jolloin $t = \sqrt[3]{2}$. Silloin $z = 2^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{2}{3}}$ ja $x = 2 + 2^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{2}{3}}$.

123. Olkoot k, m ja n parittomia lukuja. Silloin $k^2 + m^2 + n^2$ on pariton luku. Siis $k^2+m^2+n^2 = 2p+1 = (p+1)^2 - p^2$. Näin ollen $k^2+m^2+n^2p^2 = (p+1)^2$. Ratkaisu on valmis, kun näytetään, että p on pariton. Mutta $k^2 + m^2 + n^2 = (2a+1)^2 + (2b+1)^2 + (2c+1)^2 = 2d+3$. Jos p olisi parillinen, $p = 2e$, olisi $(p+1)^2 = 4e^2+4e+1 \neq 2d+3$. Siis p on pariton.

124. Summan termit ovat $\sqrt{2\sqrt{2}x - x^2 + k^2 - 2} = \sqrt{k^2 - (x-\sqrt{2})^2} \leq k$, $k = 1, 2, \ldots$, 1995. Summan arvo on siis pienempi tai yhtä suuri kuin $1 + 2 + \cdots + 1995 = 998 \cdot 1995$. Yhtäsuuruus vallitsee silloin ja vain silloin, kun $x = \sqrt{2}$.

125. Valitaan säteeltä AC piste B'' siten, että $AB'' = c'$ ja piste C'' suoralta AB eri puolelta A:ta kun B siten, että $AC'' = b'$. Komiot $A'B'C'$ ja $AB''C''$ ovat yhteneviä. Olkoon D sellainen suoran AB piste, että $CD \| B''C''$. Jos $\dfrac{b}{c'} = k$, niin $AD = kb'$ ja $CD = ka'$. Koska $\angle ABC = \angle AB''C'' = \angle ACD$, niin kolmiot BCD ja CAD ovat yhdenmuotoisia. Siis $\dfrac{BC}{AC} = \dfrac{BD}{CD}$, ja koska $AC = b = kc'$, $\dfrac{a}{kc'} = \dfrac{c+kb'}{ka'}$, mistä $kaa' = kbb' + kcc'$, $aa' = bb' + cc'$.

126. Jos m, n ja k ovat tehtävän ehdon toteuttavia lukuja, niin k ei ole jaollinen kahdella eikä kolmella. Siis $k = 6s \pm 1$, joten $2^m + 3^n = 36s^2 \pm 12s + 1$. Tämä merkitsee, että $2^m \equiv 1 \mod 3$, joten m on parillinen. Mutta tästä seuraa, että $3^n \equiv 1 \mod 4$, josta seuraa, että n:kin on parillinen. Ratkaistava yhtälö on siis muotoa $(2^M)^2 + (3^N)^2 = k^2$. 2^M, 3^N ja k ovat näin ollen muotoa $2^M = 2pq$, $3^N = p^2 - q^2$, $k = p^2 + q^2$, missä p:llä ja q:lla ei ole yhteisiä tekijöitä ja luvuista toinen on parillinen, toinen pariton. Koska $pq = 2^{M-1}$, on oltava $q = 1$, $p = 2^{M-1}$. Siis $3^N = (p+1)(p-1) = (2^{M-1}+1)(2^{M-1}-1)$. Kahdella toisistaan eroavista 3:n potensseista toisen on oltava $1 = 3^0$ ja toisen $3 = 3^1$. Siis $2^{M-1} + 1 = 3$, joten $M = 2$, $N = 1$, $m = 4$, $n = 2$, $k = 5$.

127. Tarkastellaan funktion arvoja $f(n^2)$: jos p on luku, jolle $(n+p-1)^2 < 2n^2 < (n+p)^2$, niin $f(n^2) = p$. Mutta $n + p - 1 < \sqrt{2}n < n + p$, joten $p = \lfloor(\sqrt{2}-1)n + 1\rfloor$. Olkoon q mielivaltainen positiivinen kokonaisluku. Yhtälö $f(n^2) = q$ eli $q = \lfloor(\sqrt{2}-1)n + 1\rfloor$ toteutuu, jos $q \leq (\sqrt{2}-1)n + 1 < q + 1$ eli

$$\frac{q-1}{\sqrt{2}-1} \leq n < \frac{q}{\sqrt{2}-1}.$$

Mutta koska tässä epäyhtälön oikean ja vasemman puolen erotus on $\dfrac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1 > 2$, löytyy ehdon täyttäviä lukuja n.

128. Koska $A_iB_j \neq A_iB_k$, kun $j \neq k$, ja $A_iB_j \neq A_lB_j$, kun $i \neq l$, pisteet A_i ja B_j ovat kaikki eri pisteitä. Valitaan A_1:n ja A_2:n kautta kulkeva suora a ja B_j, B_k. Olkoot C_j ja C_k B_j:n ja B_k:n kohtisuorat projektiot suoralla a. Pythagoraan lauseen perusteella $A_2C_j^2 - A_1C_j^2 = 2 + j - 1 - j = 1 = 2 + k - 1 - k = A_2C_k^2 - A_1C_k^2$; lisäksi B_j ja B_k ja siis

C_j ja C_k ovat lähempänä A_1:tä kuin A_2:ta. Mutta näin ollen $C_j = C_k$, ja kaikki pisteet B_j sijaitsevat suoralla b, joka on kohtisuorassa suoraa a vastaan. Kun päättely toistetaan niin, että A:t ja B:t vaihdetaan, nähdään, että kaikki A_i-pisteet ovat suoraa b vastaan kohtisuoralla suoralla.

129. Oletetaan, että $k \leq 1$. Kaikkien suoraa d pisteessä A sivuavien pallojen keskipisteet ovat suoraa d vastaan kohtisuorassa tasossa α ja kaikkien suoraa d pisteessä B sivuavien pallojen keskipisteet myös d:tä vastaan kohtisuorassa tasossa β. Tasot α ja β ovat yhdensuuntaiset. Jos $O_1 \in \alpha$ ja $O_2 \in \beta$ ovat kaksi tehtävän mukaista toisiaan sivuavaa palloa ja M näiden pallojen sivuamispiste, niin $\dfrac{MO_1}{MO_2} = k$. Mutta tämä merkitsee, että M kuuluu siihen tasoon γ, joka on α:n ja β:n suuntainen ja jonka etäisyydet näistä tasoista suhtautuvat kuten $k : 1$. Olkoon nyt d y-akseli, $AB = 1$, $A = (0, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$, $O_1 = (0, 0, z_1)$ ja $O_2 = (x_2, 1, z_2)$. Silloin

$$\frac{z_1}{\sqrt{x_2^2 + z_2^2}} = k$$

eli $z_1^2 = k^2(x_2^2 + z_2^2)$. Piste M on $\left(\dfrac{kx_2}{1+k}, \dfrac{k}{1+k}, \dfrac{z_1 + kz_2}{1+k}\right)$. Koska $MO_1 = O_1A$, on $\dfrac{k}{1+k}\sqrt{x_2^2 + 1 + (z_2 - z_1)^2} = z_1$ eli $(1+k)^2 z_1^2 = k^2x_2^2 + k^2 + k^2z_2^2 - 2k^2z_1z_2 + k^2z_1^2 = (1 + k^2)z_1^2 + k^2 - 2kz_1z_2$ eli $2kz_1^2 = k^2 - 2kz_1z_2$ eli $2z_1^2 + 2kz_1z_2 = k$. Mutta pisteen M etäisyys y-akselista eli suorasta d on

$$\sqrt{\frac{k^2x_2^2}{(1+k)^2} + \frac{(z_1 + kz_2)^2}{(1+k)^2}} = \frac{1}{1+k}\sqrt{k^2(x_2^2 + z_2^2) + z_1^2 + 2kz_1z_2}$$
$$= \frac{1}{1+k}\sqrt{2z_1^2 + 2kz_1z_2} = \frac{\sqrt{k}}{1+k}.$$

M on siis tasossa γ etäisyydellä $\dfrac{\sqrt{k}}{1+k}AB$ suorasta d. On selvää, että jokainen tällainen piste voi olla piste M.

130. Olkoon P tehtävässä mainittu säännöllisen tetraedrin $ABCD$ sisäpiste. Olkoon S tetraedrin sivutahkon ala. Nyt $|ABCD| = \dfrac{1}{3}hS = |ABCP| + |BCDP| + |CDAP| + |DABP| = \dfrac{1}{3}(h_1 + h_2 + h_3 + h_4)S$, joten $h = h_1 + h_2 + h_3 + h_4$. Koska $\dfrac{h - h_i}{h + h_i} = \dfrac{2h}{h + h_i} - 1$, epäyhtälön todistamiseksi on osoitettava, että $2h\left(\dfrac{1}{h+h_1} + \dfrac{1}{h+h_2} + \dfrac{1}{h+h_3} + \dfrac{1}{h+h_4}\right) - 4 \geq \dfrac{12}{5}$. Mutta koska $5h = h + h_1 + h + h_2 + h + h_3 + h + h_4$, todistettava epäyhtälö on myös $(h + h_1 + h + h_2 + h + h_3 + h + h_4)\left(\dfrac{1}{h+h_1} + \dfrac{1}{h+h_2} + \dfrac{1}{h+h_3} + \dfrac{1}{h+h_4}\right) \geq 16$. Tämä on kuitenkin välitön seuraus Cauchyn – Schwarzin epäyhtälöstä $\left(\sum a_ib_i\right)^2 \leq \sum a_i^2 \sum b_i^2$ (aseta $a_i = \sqrt{h + h_i}$, $b_i = \dfrac{1}{\sqrt{h + h_i}}$).

131. Olkoon x reaaliluku ja $P(x) = 0$. Silloin $P((x+1)^2) = P(x+1)P(x+1-1) = 0$. Jokainen juuri tuottaa siten uuden, eri suuren ei-negatiivisen juuren ja jokainen ei-negatiivinen juuri itseään suuremman juuren. P:llä on siten äärettömän monta nollakohtaa, joten se on vakio. Olkoon sitten $P(z) = 0$, missä z on kompleksiluku. Tehtävän ehdosta seuraa, että $P(z^2) = P(z^4) = \ldots = 0$. Tämä on mahdollista vain, kun $|z| = 1$. Mutta z:n myötä myös $z + 1$ on juuri. Siis myös $|z + 1| = 1$. Kompleksiluku z on ympyröiden $|z| = 1$ ja $|z + 1| = 1$ leikkauspisteessä. Nämä pisteet ovat $\pm\varepsilon = \pm e^{\frac{2\pi}{3}}$; tunnetusti ne toteuttavat yhtälön $z^3 = 1$ ja $z^2 + z + 1 = 0$. Koska P:llä ei ole muita nollakohtia, sen on oltava muotoa $P(z) = (z - \varepsilon)^m(z + \varepsilon)^n$. Koska P on reaalilukukertoiminen, on oltava $m = n$, joten $P(x) = (x^2 + x + 1)^n$ jollakin n.

132. Olkoon a kokonaisluku. $Q(a) = a^3 - a + 3 = a(a+1)(a-1) + 3$. Koska peräkkäisistä kokonaisluvuista yksi on jaollinen 3:lla $3|Q(a)$. Jos a on jaollinen 3:lla, $P(a)$ ei ole jaollinen 3:lla. Olkoon $a = 3b \pm 1$. Silloin $P(a) = 3q \pm 1 + 3r + 1 + 3b \pm 1 + 2 = 3c + 2$ tai $3c + 1$. $P(a)$ ei voi olla jaollinen $Q(a)$:lla, koska $P(a)$ ei ole jaollinen 3:lla.

133. Oletetaan, että a ja b ovat molemmat parillisia. Silloin $a^2 + b^2 + 1 = 4k + 1 = (2k + 1)^2 - (2k)^2$. Asetetaan $c = 2k$, $d = 2k + 1$. Olkoot a ja b molemmat parittomia. Silloin $a^2+b^2+1 = 4k+3 = (2k+2)^2-(2k+1)^2$. Asetetaan $c = 2k+1$, $d = 2k+2$. Olkoon sitten a parillinen ja b pariton. Silloin $a^2 + b^2 + 1 = 4k + 2$. Mutta $d^2 - c^2 = (d - c)(d + c)$ on jaollinen neljällä, jos d ja c ovat joko molemmat parillisia tai molemmat parittomia, ja pariton, jos luvuista tasan toinen on parillinen. Se ei siis voi olla muotoa $4k + 2$.

134. On helppo nähdä, että $S(O)$ ja $S(I)$ ovat kumpikin kolmion piirin puolikkaan suuruiset. Olkoon M kolmion sisäpiste. Olkoot $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ ja $\overrightarrow{v_3}$ kolmion sivujen BC, CA ja AB suuntaiset yksikkövektorit. Silloin $BA' = \overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{v_1}$, $CB' = \overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{v_2}$ ja $AC' = \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{v_3}$. Nyt $S(M) = \overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{v_2}+AC' = \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{v_3} = (\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AM})\cdot\overrightarrow{v}_1+(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AM})\cdot\overrightarrow{v_2}+\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{v_3} = \overrightarrow{AM}\cdot(\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2}+\overrightarrow{v_3})+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{v_1}+CA$. Kolmen yksikkövektorin v_1, v_2 ja v_3 summa on nollavektori vain, jos vektorien väliset kulmat ovat $120°$ eli jos ABC on tasasivuinen. Näin ei oletuksen mukaan ole. Mutta nyt $S(M) = S(N)$ merkitsee, että $(\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AN})\cdot(\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2}+\overrightarrow{v_3})$. Vektori $\overrightarrow{NM}$ on kohtisuorassa vektoria $\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2}+\overrightarrow{v_3}$ vastaan. Mutta silloin myös $\overrightarrow{OI}$ on samaa vektoria vastaan kohtisuorassa, joten $\overrightarrow{NM}\|\overrightarrow{OI}$.

135. Tehtävässä mainitut luvut ovat yksikkökiekossa $D = \{z \mid |z| \le 1\}$. Jaetaan kiekko kolmeen yhtä suureen sektoriin. Ainakin yhdessä sektoreista on luvut z_{i_j} siten, että $|z_{i_1}| + |z_{i_2}| + \cdots + |z_{i_k}| \ge \frac{1}{3}$. Voimme olettaa, että näiden lukujen argumentit ovat välillä $-\frac{\pi}{3} \le \arg z_{i_j} < \frac{\pi}{3}$; ellei näin ole, voidaan tehdä sopiva kierto origon ympäri. Olkoon $z_{i_j} = |z_{i_j}|(\cos\phi_{i_j} + i\sin\phi_{i_j})$. Nyt $\cos\phi_{i_j} \ge \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$. Siis

$$|z_{i_1} + \cdots + z_{i_k}| \ge |z_{i_1}|\cos\phi_{i_1} + \cdots + |z_{i_k}|\cos\phi_{i_k} \ge \frac{1}{2}\left(|z_{i_1}| + \cdots + |z_{i_k}|\right) \ge \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

136. Jos n ja m kirjoitetaan tehtävässä esitetyin ehdoin p:n potenssien avulla, kertoimet a_j ja b_j ovat yksikäsitteiset. Binomikertoimia tarkastelemalla voi vakuuttua siitä, että jos p on alkuluku, niin $(1+x)^{p^k} \equiv 1+x^{p^k} \bmod p$. Näin ollen $(1+x)^n = (1+x)^{a_0+a_1p+\cdots+a_kp^k} = (1+x)^{a_0}\left((1+x)^p\right)^{a_1}\cdots\left((1+x)^{p^k}\right)^{a_k} \equiv (1+x)^{a_0}(1+x^p)^{a_1}\left(1+x^{p^2}\right)^{a_2}\cdots\left(1+x^{p^k}\right)^{a_k}$. Joa $a_i \ge b_i$, niin tässä tulossa termin $x^m = x^{b_0+b_1p+\cdots+b_kp^k}$ kerroin on (m:n esityksen yksikäsitteisyyden takia)

$$\binom{a_0}{b_0}\binom{a_1}{b_1}\cdots\binom{a_k}{b_k}.$$

Yhtälön toisella puolella taas x^m:n kerroin on $\binom{n}{m}$. Jos $a_i < b_i$ jollain i, ei x^m:ää saada yhtälön oikealle puolelle ollenkaan. Silloin $\binom{n}{m} \equiv 0 \bmod p$.

137. Todistetaan ensimmäinen väite induktiolla. Kun $n = 1$, asia on selvä. Oletetaan, että tapaus $n-1$ on selvä. Silloin

$$\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{x+a_i} = \frac{1}{x+a_n}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{A_i}{x+a_i}.$$

Mutta jos $A_i' = \dfrac{A_i}{a_n-a_i}$, niin $\dfrac{A_i}{(x+a_i)(x+a_n)} = \dfrac{A_i'}{x+a_i} - \dfrac{A_i'}{x+a_n}$, ja induktioaskel saadaan otetuksi. Toinen väite todistetaan myös induktiolla. Kun $n = 2$, jonossa on vain A_1. Oletetaan, että väite on tosi tapauksessa $n-1$. Silloin

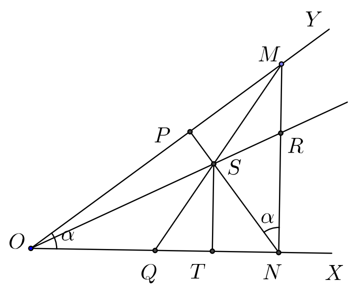
$$\prod_{i=1}^{n-1}\frac{1}{x+a_i} = \sum_{i=1}^{n-1}\frac{B_i}{x+a_i}, \qquad \prod_{i=2}^{n}\frac{1}{x+a_i} = \sum_{i=2}^{n}\frac{C_i}{x+a_i},$$

ja $B_1 > 0$, $B_1 + B_2 < 0$, …, $C_2 > 0$, $C_2 + C_3 < 0$, … Mutta

$$\prod_{i=1}^{n-1}\frac{1}{x+a_i} - \prod_{i=2}^{n}\frac{1}{x+a_i} = ((x+a_n)-(x+a_1))\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{x+a_i} = (a_n-a_1)\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i}{x+a_i}.$$

Vertaamalla summia saadaan $(a_n-a_1)A_1 = B_1$, $(a_n-a_1)A_2 = B_2 - C_2$, …, $(a_n-a_1)A_{n-1} = B_{n-1} - C_{n-1}$. Laskemalla näitä yhtälöitä yhteen saadaan $(a_n-a_1)A_1 = B_1$, $(a_n-a_1)(A_1+A_2) = B_1+B_2-C_2$, …, $(a_n-a_1)(A_1+A_2+\cdots+A_{n-1}) = B_1+B_2+\cdots+B_{n-1}-C_2-\cdots-C_{n-1}$. Näistä väite seuraa.

138. Kylkien kohtisuoruuden vuoksi myös $\angle MNP = \alpha$. Leikatkoon puolisuora OS MN:n pisteessä R. Cevan lauseen nojalla $\dfrac{OP}{PM}\cdot\dfrac{MR}{RN} = 1$. Siis $\dfrac{MR}{RN} = \dfrac{PM}{OP} = \dfrac{PM}{PN}\cdot\dfrac{PN}{OP} = \tan^2\alpha$. Siis $\dfrac{MN}{RN} = \dfrac{MR}{RN} + 1 = 1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$. Mutta $MN\cos\alpha = NP = ON\sin\alpha$.



Siis $RN = MN\cos^2\alpha = ON\sin\alpha\cos\alpha$. $\dfrac{RN}{ON} = \sin\alpha\cos\alpha$ riippuu vain α:sta, joten S on kaikilla M:n valinnoilla samalla O:n kautta kulkevalla puolisäteellä. Jos $SP = ST$, tämä puolisuora on kulman XOY puolittaja. Silloin $\dfrac{MR}{RN} = \dfrac{OM}{ON}$ eli $\tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$. Tämä yhtälö on sama kuin $\dfrac{1}{\cos^2\alpha} - 1 = \dfrac{1}{\cos\alpha}$ ja $\cos^2\alpha + \cos\alpha = 1$ ja $2\cos^2\alpha - 1 + 2\cos\alpha = 1$ eli $\cos(2\alpha) + 2\cos\alpha = 1$.

139. Olkoon M EF:n ja AB:n leikkauspiste. Osoitetaan, että M ei riipu F:n valinnasta. Näin on, jos suhden $\dfrac{MB}{MA}$ on vakio. Sovelletaan Menelaoksen lausetta kolmioon ABD ja suoraan EF: saadaan

$$\frac{MA}{MB} = \frac{ED}{EB}\cdot\frac{FA}{FD}. \tag{1}$$

Tarkastellaan ensin tapaus $BD\|AC$. Silloin $ABDC$ on suunnikas ja $AF = FB$. Olkoon G piste puolisuoralla AC niin, että C on janalla AG. Silloin $\angle BEC = \angle ECG = \angle ECB$, joten kolmio BEC on tasakylkinen. Siis $BE = BC = AB$. Lisäksi $BD = AC$. Siis $\dfrac{MB}{MA} = \dfrac{EB}{ED} = \dfrac{ED+DB}{DE} = \dfrac{AB+AC}{AB} = 1 + \dfrac{AC}{AB}$. Oletetaan sitten, että BD leikkaa suoran AC pisteessä I niin, että C on janalla AI. Silloin CE on kolmion CDI kulman C puolittaja, joten $\dfrac{DE}{EI} = \dfrac{CD}{CI}$. Merkitään $\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{AF}{FD} = k$. Tehdyistä oletuksista seuraa, että $k > 1$. (Tapaus $k < 1$ on analoginen.) Koska $k = \dfrac{AI}{CI} = 1 + \dfrac{AC}{CI}$, on $CI = \dfrac{1}{k-1}AC$. Näin ollen $\dfrac{EI}{ED} = \dfrac{k}{k-1}\dfrac{AC}{AB}$. Samoin saadaan $\dfrac{BD}{DI} = k - 1$ ja $\dfrac{DI}{ED} = 1 + \dfrac{EI}{ED} = 1 + \dfrac{k}{k-1}\dfrac{AC}{AB}$, $\dfrac{BD}{DE} = k - 1 + k\dfrac{AC}{AB}$, $\dfrac{EB}{ED} = 1 + \dfrac{BD}{DE} = k\left(1 + \dfrac{AC}{AB}\right)$. Mutta yhtälön (1) perusteella jälleen $\dfrac{BM}{AM} = \dfrac{1}{k}\dfrac{EB}{DE} = 1 + \dfrac{AC}{AB}$.

140. Summa on polynomin arvo, kun $x = 1$, siis $(1-5+5)^{2001}(1-4+2)^{2002} = 1$.

141. Olkoon $P(x)$ tehtävän polynomi. Silloin $P(x) = (x-1)Q_1(x) + 2$ ja $P(x) = (x-2)Q_2(x) + 1$ ja koska jakojäänös on jakajaa alemmanasteinen polynomi, $P(x) = (x^2 - 3x + 2)Q_3(x) + ax + b$. Koska $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$, saadaan $P(1) = 2 = a + b$ ja $P(2) = 1 = 2a + b$. Siis $a = -1$ ja $b = 3$, jakojäännös on $-x + 3$.

142. Käytetään hyväksi polynomin jakoa tekijöihin kompleksilukujen joukossa:

$$\frac{x^{9999} + x^{8888} + x^{7777} + x^{6666} + x^{5555} + x^{4444} + x^{3333} + x^{2222} + x^{1111} + 1}{x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1}$$
$$= \frac{(x^{11110} - 1)(x - 1)}{(x^{1111} - 1)(x^{10} - 1)}.$$

Väite tulee todistetuksi, jos osoitetaan, että jokainen nimittäjän k-kertainen nollakohta on osoittajan k-kertainen nollakohta. $x = 1$ on sekä nimittäjän, että osoittajan kaksinkertainen nollakohta. Olkoon $x_0 \neq 1$ nimittäjän nollakohta. Jos $x_0^{10} = 1$, niin $x_0^{11110} = 1$ ja jos $x_0^{1111} = 1$, niin $x_0^{11110} = 1$. Nimittäjän nollakohdat ovat osoittajan nollakohtia. Jos $x_0 \neq 1$ ja $x_0^{10} = 1$, niin $x_0^{1110} = 1$ ja $x_0^{1111} = x_0 \neq 1$. Tästä seuraa, että nimittäjän nollakohdista vain $x = 1$ on useampikertainen. (n:nnen asteen binomiyhtälöllä $x^n = 1$ on tunentusti n eri kompleksijuurta, joten nimittäjän useampikertaisen nollakohdan pitäisi olla sekä yhtälön $x^{10} = 1$ että $x^{1111} = 1$ juuri.)

143. Yhtälön (reaaliset) ratkaisut ovat ei-negatiivisia. Olkoon $y_1 = \sqrt{x+2x} = \sqrt{3x}$, $y_2 = \sqrt{x+2y_1}$, ..., $y_n = \sqrt{x+2y_{n-1}}$. Tehtävän yhtälö on siis $y_n = x$. Jos merkitään vielä $y_0 = x$, niin y_j:t määrittelevät yhtälöt ovat $y_j^2 = x + 2y_{j-1}$, $j = 1, \ldots, n$. Näistä seuraa, että $y_{j+1}^2 - y_j^2 = y_j - y_{j-1}$, $j = 1, \ldots, n-1$. Edelleen päätellään, että jos $y_1 > y_0 = x$, niin y_j:t muodostavat aidosti kasvavan jonon, jolloin siis $y_n > y_0 = x$, ja jos $y_1 < y_0 = x$, y_j:t muodostava aidosti vähenevän jonon, ja $y_n < x$. Koska on oltava $y_n = x$, on oltava $y_1 = x$ eli $\sqrt{3x} = x$ eli $x = 0$ tai $x = 3$. – Jos jompikumpi näistä vaihtoehdoista toteutuu, on $y_1 = y_2 = \cdots = y_n = x$, ja yhtälö toteutuu.

144. Tarkastellaan vektoreita $\mathbf{v}_k = a_k\mathbf{i} + b_k\mathbf{j}$. Tehtävän epäyhtälö on sama kuin vektorien kolmioepäyhtälö

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \mathbf{v}_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |\mathbf{v}_k|$$

eli että murtoviivan päätepisteiden etäisyys on pienempi tai yhtä suuri kuin murtoviivan pituus.

145. $3^{6n} - 2^{6n} = \left(3^6\right)^n - \left(2^6\right)^n = (3^6 - 2^6) \cdot k = 665k = 19 \cdot 35 \cdot k$. Luku on siis aina jaollinen jopa 665:llä. $n^5 - 5n^3 + 4n = n(n^4 - 5n^2 + 4) = n(n^2-1)(n^2-2) = (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$. Viiden peräkkäisen luvun joukossa on ainakin yksi kolmella ja yksi viidellä jaollinen, yksi neljällä jaollinen ja yksi muu parillinen. Luku on siis jaollinen luvulla $3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 2 = 120$. Jos kokonaisluku n toteuttaisi yhtälön $n^2 + 3n + 5 = 121k$, niin yhtälön diskriminantin täytyisi olla neliöluku: $9 - 4(5 - 121k) = m^2$ eli $121 \cdot 4k - 11 = m^2$. Luvun m on oltava 11:llä jaollinen. Tästä seuraa, että luku m^2 ja lopulta luku 11 on jaollinen luvulla $11^2 = 121$. Näinhän ei voi olla, joten ei ole kokonaislukuja n ja m, joille $n^2 + 3n + 5 = 121k$ toteutuisi

146. $(k-1)k(k+1)(k+2) + 1 = (k^2-1)(k^2+2k) + 1 = k^4 + 2k^3 - k^2 - 2k + 1$. Neljännen, kolmannen ja nollannen asteen termien muoto antaa aiheen otaksua, että neliö olisi $(k^2+k-1)^2$. Näin onkin: $(k^2+k-1)^2 = k^4 + k^2 + 1 + 2k^3 - 2k^2 - 2k$.

147. Kun $99^9 = (10-1)^{9^9}$ kehitetään binomikaavan mukaan, saadaan $10k-1$ (9^9 on pariton luku). Luku päättyy yhdeksikköön. Kun $n \geq 5$, $2^n = 32 \cdot 2^{n-5}$. Tästä nähdään, että 2^n päättyy samaan numeroon kuin $2 \cdot 2^{n-5} = 2^{n-4}$ ja edelleen, että 2^n:n viimeinen numero määräytyy sen mukaan, mitä on n modulo 4. $3^{4^5} = (4-1)^{4^5} = 4k + (-1)^{4^5} = 4k + 1$. Luku $2^{3^{4^5}}$ päättyy siis samaan numeroon kuin 2^1 eli numeroon 2.

148. Olkoon k suurin positiivinen kokonaisluku, jolle $2^k \le n$. Lavennetaan summan

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$

yhteenlaskettavia niin, että kaikille tulee sama nimittäjä. 2^k on tämän nimittäjän tekijä. Kaikkien muiden yhteenlaskettavien kuin $\frac{1}{2^k}$:n osoittajassa on tekijänä jokin 2:n potenssi. Osoittaja on siis pariton, ja jako ei mene tasan.

149. Selvästi 0 voi tulla kysymykseen. Se on ainoa ratkaisu: nollaan päättymättömän luvun neliön viimeinen numero on jokin numeroista 1, 4, 5, 6 ja 9. Kun neliötä jaetaan 4:llä, jakojäännös on 0 ta 1; lukujen 11, 55, 66 ja 99 jakojäännös 4:llä jaettaessa on 3 tai 2, joten neliö ei pääty neljään ykköseen, viitoseen, kuutoseen tai yhdeksikköön. Neliön jakojäännökset 16:lla jaettaessa ovat 0, 1, 4 ja 9; 4444 antaa jakojäännöksen 12. Neliö ei voi päättyä myöskään neljään neloseen.

150. Tarkastellaan n-ruutuisia nauhoja, jotka on väritetty tehtävän säännön mukaan. Olkoon a_n niiden nauhojen lukumäärä, joissa oikeanpuoleisin (viimeinen) ruutu on vihreä ja b_n niiden nauhojen lukumäärä, joissa viimeinen ruutu on violetti. Kysytty luku on $a_{12}+b_{12}$. Lisätään n-ruutuiseen nauhaan uusi viimeinen ruutu. Koska sekä vihreän että violetin ruudun vieressä saa olla vihreä ruutu, $a_{n+1}=a_n+b_n$, mutta violetti ruutu saa olla vain vihreän vieressä, joten $b_{n+1}=a_n$. Näin ollen jono (a_n) toteuttaa ehdon $a_{n+1}=a_n+a_{n-1}$. Koska $a_1=b_1=1$ ja $a_2=a_1+b_1=2$, a_i:t ovat Fibonaccin lukuja. Siis $a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=3$, ..., $a_{11}=b_{12}=144$, $a_{12}=233$ ja $a_{12}+b_{12}=377$ $(=a_{13})$.

151. [Tehtävän tekstissä ei spesifioitu sitä, että kysyttyjen kolmioiden kärjet ovat kahdeksankulmion kärkien joukossa. Ilman tätä ehtoa jakojen määrä on tietysti ääretön.] Olkoon k_n n-kulmion erilaisten kolmioiksijakojen lukumäärä. Sovitaan, että $k_2=1$. Selvästi $k_3=1$ ja $k_4=2$. Tarkastellaan sitten n-kulmiota $\mathcal{P}=A_1A_2A_3\ldots A_n$. Piirretään kolmio $A_1A_mA_n$, $1<m<n$. Se jakaa $\mathcal{P}$:n m-kulmioksi $A_1A_2\ldots A_m$ ja $(n-m+1)$-kulmioksi $A_mA_{m+1}\ldots A_n$. Nämä monikulmiot jakautuvat toisistaan riippumatta k_m:llä ja k_{n-m+1}:llä eri tavalla kolmioiksi. Jos $m\ne q$, niin kolmiot $A_1A_mA_n$ ja $A_1A_qA_n$ leikkaavat toisensa. Yksikään kuvatulla tavalla kolmion $A_1A_mA_n$ valintaan perustuva $\mathcal{P}$:n kolmiointi ei voi olla sama kuin jokin kolmion $A_1A_qA_n$ valintaan perustuva kolmiointi. Mutta tästä seuraa, että $k_n=k_2k_{n-1}+k_3k_{n-2}+\cdots+k_{n-1}k_2$. Siis $k_5=k_2k_4+k_3^2+k_4k_2=5$, $k_6=k_2k_5+k_3k_4+k_4k_3+k_5k_2=14$, $k_7=42$ ja $k_8=132$.

152. Olkoon permutaation ensimmäinen luku k. Jos permutaatiossa luvut $k+1$, ..., n ovat nousevassa järjestyksessä, niin jokaista tällaista lukua a aikaisemmin permutaatiossa esiintyy $a-1$. Jos lisäksi luvut 1, ..., $k-1$ ovat laskevassa järjestyksessä, niin jokaista tällaista lukua a edeltää luku $a+1$. Tällainen permutaatio toteuttaa siis tehtävän ehdon. Elleivät k:ta suuremmat luvut ole nousevassa järjesteyksessä, jonossa on luku a, jota seuraa luku $a-1$. Jos a on lisäksi järjestyksessä ensimmäinen tällainen luku, myäs $a+1$ seuraa a:ta. Tällainen permutaatio ei toteuta tehtävän ehtoa. Vastaavasti jono, jossa k:ta pienemmät luvut eivät ole laskevassa järjestyksessä, ei toteuta tehtävän ehtoa. Nyt permutaatioita, joiden ensimmäinen luku on k ja jotka toteuttavat tehtävän ehdon, on $\binom{n-1}{k-1}$ kappaletta: riittää, kun yksilöidään lukujen $1, 2, \ldots, k-1$ paikat jonon $n-1$:n jäsenen joukossa. Ehdon toteuttavien permutaatioiden lukumäärä on siis

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} = 2^{n-1}.$$

153. Riittää, kun osoitetaan, että ruudukossa, jonka kaikki ruudut on väritetty, on aina suorakulmio, jonka kärkiruudut ovat samanväriset. Voimme olettaa, että neljässä sarakkeessa on kussakin ainakin kaksi kullanväristä ruutua. Jos jossain näistä sarakkeista on kolme kullanväristä ruutua, voidaan valita jokin toinen sarake ja sen kaksi kullanväristä ruutua suorakaiteen kahdeksi kärkipisteeksi. Oletetaan sitten, että näistä neljästä sarakkeesta jokaisessa on yksi hopeanvärinen ruutu. Kaksi näistä on samalla rivillä. Niiden sarakkeiden kullanväriset ruudut ovat tällöin myös samoilla riveillä, ja ne ovat suorakaiteen kärkipisteitä.

154. [Tehtävän tekstistä puuttui olennainen tieto: myös jana BC on väritetty valkoiseksi tai siniseksi.] Oletetaan, että tehtävän mukainen seitsenkulmio värityksineen on olemassa. Oletetaan, että BC on valkoinen. Oletetaan, että janoista BA_i kaksi sellaista, joiden toiset päätepisteet ovat seitsenkulmion sisälävistäjien päätepisteitä, esim. BA_1 ja BA_3, on valkoista. Silloin CA_1 ja CA_3 ovat sinisiä samoin kuin A_1A_3. Ristiriita. Oletetaan sitten, että kahta tällaista valkoista janaa ei ole. Silloin valkoisista janoista BA_j on enintään kaksi sellaista, joiden päätepisteiden välinen jana on seitsenkulmion sivu. Muttä tällöin ainakin viisi janoista BA_j on sinisiä, siis esim. BA_1, BA_2, BA_3, BA_4 ja BA_5. Mutta nyt A_1A_3, A_3A_5 ja A_1A_5 ovat kaikki valkoisia. Jälleen ristiriita.

155. Kolmiot ABD ja CHD ovat suorakulmaisia. Lisäksi $AB \perp CH$ ja $AD \perp CD$. Siis $\angle BAD = \angle HCD$, joten kolmiot ovat yhdenmuotoiset. Siis

$$\frac{BD}{AD} = \frac{HD}{DC},$$

mikä on yhtäpitävää väitteen kanssa.

156. Koska $ED \| CA$, niin

$$\frac{AD}{DB} = \frac{CE}{EB}.$$

Jos BB' on keskijana, niin $CB' = B'A$. Siis

$$\frac{BE}{EC} \cdot \frac{CB'}{B'A} \cdot \frac{AD}{DB} = 1,$$

ja Cevan lause takaa, että BB', CD ja AE leikkaavat samassa pisteessä.

157. Olkoon tasasivuisen kolmion ABC sivun pituus a. Jos P on kolmion ympäri piirretyn ympyrän piste ja sijaitsee kolmion kärkien A ja C välissä, niin Ptolemaioksen lauseen perusteella

$$AB \cdot PC + BC \cdot AP = AC \cdot PB$$

eli $a(PC + PA - PB) = 0$. Siis $0 = (PC + PA - PB)^2 = PA^2 + PB^2 + PC^2 + 2(PA \cdot PC - PB \cdot PC - PA \cdot PB)$ ja $PA \cdot PC - PB \cdot PC - PA \cdot PB) = -\frac{1}{2}(PA^2 + PB^2 + PC^2)$. Kehäkulmalauseesta ja kolmion ABC tasasivuisuudesta seuraa, että $\angle APB = \angle BPC = 60^\circ$ ja $\angle APC = 120^\circ$. Kosinilauseen mukaan siis

$$\begin{aligned} AB^2 &= a^2 = PA^2 + PB^2 - PA \cdot PB \\ BC^2 &= a^2 = PB^2 + PC^2 - PB \cdot PC \\ AC^2 &= a^2 = PA^2 + PC^2 + PA \cdot PC. \end{aligned}$$

Kun nämä kolme yhtälöä lasketaan puolittain yhteen, saadaan $3a^2 = 2(PA^2 + PB^2 + PC^2) - (PA \cdot PB + PB \cdot PC - PA \cdot PC) = \frac{3}{2}(PA^2 + PB^2 + PC^2)$. Saadaan viimein $PA^2 + PB^2 + PC^2 = 2a^2$.

158. Piirretään sisään piirretylle ympyrälle hypotenuusan suuntainen tangentti. Sivuamispiste on ympyrän sisäpuolella, joten tangentti leikkaa molemmat kateetit. Siis suoran kulman kärki on etäämmällä hypotenuusasta kuin tämä tangentti. Piirretyn tangentin etäisyys hypotenuusasta on tasan ympyrän halkaisija $2r$, suoran kulman kärjen taas h. Siis $h > 2r$, mikä on sama tuin tehtävän oikeanpuoleinen epäyhtälö. Koska $\sqrt{2} - 1 > 0{,}4 = \frac{2}{5}$, vasemmanpuolinen epäyhtälö tulee todistetuksi, jos osoitetaan, että $\sqrt{2} - 1 < \frac{r}{h}$ eli $h < \frac{r}{\sqrt{2} - 1} = r + r\sqrt{2}$. Mutta h eli suoran kulman kärjen etäisyys hypotenuusasta on pienempi kuin sisään piirretyn ympyrän keskipisteen etäisyys hypotenuusasta ($= r$) lisättynä suoran kulman kärjen etäisyydellä sisään piirretyn ympyrän keskipisteestä ($= r\sqrt{2}$).

159. [Väite tuntuu niin ilmeiseltä, että sen todistamiseen on suhtauduttava varovasti.] Olkoot AB ja CD yhdensuuntaisia jänteitä ja O ympyrän keskipiste. Olkoon E AB:n keskipiste, olkoon F EO:n ja CD:n leikkauspiste ja G (lyhemmän) kaaren AB ja EO:n leikkauspiste. Väite tulee todistetuksi, jos näytetään, että F on CD:n keskipiste. Oletetaan ensin, että AB ja CD ovat samalla puolen O:ta ja että $AB < CD$. Oletetaan vielä, että A ja C ovat samalla puolen suoraa OE. Nyt kolmiot OEA ja OEB ovat yhtenevät (sss). Siis $\angle AOG = \angle GOB$ ja kaaret AG ja GB ovat yhtä pitkät. Koska $AB \| CD$, niin $\angle ADC = \angle BAD$. Siis kaaret AC ja BD ovat yhtä pitkät. Mutta nyt myös kaaret CAG ja GBD ovat yhtä pitkät, jotebn $\angle COG = \angle GOD$. Mutta tämä merkitsee, että kolmiot OFC ja OFD ovat yhtenevät (sks). Siis $CF = FD$, joten F on CD:n keskipiste. Jos sitten CD ja AB ovat eri puolilla O:ta, voidaan samoin kuin edellä osoittaa, että $\angle COG = \angle GOD$. Tästä seuraa $\angle COF = \angle FOD$ ja edelleen kolmioiden OFC ja OFD yhtenevyys.

160. Merkitään kerrottavia lukuja $x = 100 - a$, $y = 100 - b$, $0 < a < 10$, $0 < b < 10$. Patakin askeleet: a) $x + y = 200 - a - b$; b) ensimmäisen numeron, joka on välttämättä ykkönen, poisto: $100 - a - b$; c) $a \cdot b$; d) $100(100 - a - b) + ab = 100(100 - a) - b(100 - a) = (100 - a)(100 - b) = xy$. Menetelmä toimii. (Se ei tietenkään toimi, jos tekijöitä on enemmän kuin kaksi.)

161. Jos luvut ovat n, $n + 1$, $n + 2$ ja $n + 3$, niin on ratkaistava yhtälö $n(n + 1)(n + 2)(n + 3) = 110\,355\,024$. Silloin varmasti $n^4 < 111\,000\,000$. On helppo todeta (jopa ilman laskinta ja tarkkaa arvoa laskematta, että $104^4 > 116\,000\,000$, joten $n \leq 103$. Toisaalta $(n + 3)^4 > 100\,000\,000$, joten $n > 97$. Mutta koska mikään luvuista n, $n + 1$, $n + 2$, $n + 3$ ei voi olla viidellä jaollinen (tulo ei pääty nollaan), niin ainoa mahdollisuus on $n = 101$. Tarkistus osoittaa, että 101, 102, 103 ja 104 todella toteuttavat tehtävän ehdot.

162. Luku päättyy n:ään nollaan, jos ja vain jos se on jaollinen luvulla $10^n = 2^n \cdot 5^n$. Luvussa 50! on tekijänä 5^{12} (5, 10, 15, 20, $25 = 5^2$, 30, 35, 40, 45, $50 = 2 \cdot 5^2$) ja 2^k, missä $k > 12$ (jo pelkistään parillisten lukujen määrä antaa tekijöiksi 25 kakkosta). Siis 50! päättyy 12:een nollaan.

163. Tehtävässä annetussa luvussa on $9 + 90 \cdot 2 + 3 = 192$ numeroa. Pyritään löytämään mahdollisimman suuri 92-numeroinen luku, joka saadaan poistamalla numeroita tehtävässä annetusta luvusta. Kahdesta 92-numeroisesta luvusta on se suurempi, joka alkaa useammalla 9:llä. Ensimmäistä luvussa olevaa yhdeksikköä edeltää kahdeksan muuta numeroa, tämän ja seuraavan välissä on 19 muuta numeroa (1011121314151617181), tämän ja seuraavan välissä taas 19 muuta numeroa jne. Jos poistetaan 84 numeroa, saadaan luku, joka alkaa 99999505151... Koska enää voidaan poistaa vain 16 numeroa, ei voida ottaa seuraavaksi numeroksi 9:ää eikä myöskään 8:aa (olisi poistettava 17 numeroa). Jos poistetaan 15 numeroa, saadaan luku, joka alkaa 9999975859... Viimeiseksi vielä poistettavaksi numeroksi on valittava 7:ää seuraava 5; suurin tehtävän ehdot täyttävä luku on 99999785960...96979899100.

164. Koska luvun numeroiden summa on 300, se on jaollinen 3:lla. Jotta se olisi kokonaisluvun toinen potenssi, sen on siis oltava jaollinen myös 3^2:lla. Luku ei kuitenkaan ole jaollinen yhdeksällä, koska sen numeroiden summa 300 ei ole jaollinen 9:llä.

165. Koska tuloon tulee loppunolla vain tulosta $2 \cdot 5 = p_1 \cdot p_3$, ja p_1 on tekijänä tulossa $1 + 2 + \ldots + 100$ kertaa ja p_3 puolestaan $1 + 2 + \ldots + 98 = \frac{1}{2}(99 \cdot 98) = 4851$ kertaa, niin nollia on 4851 kappaletta.

166. Kun kaksi 6:een päättyvää lukua kerrotaan, niin tulo päättyy 6:een: $(10a + 6) \cdot (10b + 6) = 100ab + 10(6a + 6b + 3) + 6$. Koska $2^{100} = \left(2^4\right)^{25} = 16^{25}$, 2^{100} voidaan kirjoittaa kuuteen päättyvien lukujen tuloksi. 2^{100} päättyy siis numeroon 6.

167. Koska $(10a + b)^3 = 10^3a^3 + 3 \cdot 10^2a^2b + 30ab^2 + b^3$ ja $(10c + b^3)^2 = 100c^2 + 20b^3c + b^6$, niin $(10a + b)^6$ päättyy samaan numeroon kuin b^6. Nyt $1^6 = 1$, $2^6 = 64$, $3^6 = 9 \cdot 81 = 729$, $4^6 = 64 \cdot 64$ päättyy samaan kuin $4^2 = 16$, 5^6 päättyy viiteen ja $6^6 = 2^6 \cdot 3^6$ päättyy samaan kuin $4 \cdot 9 = 36$. Summa päättyy siis samaan kuin $1 + 4 + 9 + 6 + 5 + 6 = 31$, eli ykköseen.

168. Kun $n = 1$, $2^{2^n} + 1 = 4 + 1 = 5$, eli väite ei tältä osin ole tosi. Mutta kun $n \geq 2$, niin $2^{2^n} + 1 = 2^{2^2 \cdot 2^{n-2}} + 1 = \left(2^4\right)^{2^{n-2}} + 1 = 16^{2^{n-2}} + 1$. Koska 6:een päättyvien lukujen kaikki potenssit päättyvät kuuteen, niin väite on tosi kaikilla $n \geq 2$.

169. Kahden luvun tulon kaksi viimeistä numeroa määräytyvät pelkästään tekijöiden kahdesta viimeisestä numerosta: $(100a + 10b + c)(100d + 10e + f) = 100^2 ad + 100a(10e + f) + 100d(10b + c) + (10b + c)(10e + f)$. Tämän perusteella voidaan helposti laskea 3^k:n kaksi viimeistä numeroa eri k:n arvoilla:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
03	09	27	81	43	29	87	61	83	49
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
47	41	23	69	07	21	63	89	67	01

Mutta tästä seuraa, että luvun $3^{n \cdot 20}$ viimeiset numerot ovat 01. Luvun $3^{999} = 3^{20 \cdot 49} \cdot 3^{19}$ kaksi viimeistä numeroa ovat siten 67. Vastaava laskelma luvuille 2^k antaa

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
02	04	08	16	32	64	28	56	12	24	48
12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
96	92	84	68	36	72	44	88	76	52	04

Nyt $2^{999} = \left(2^{22}\right)^{45} \cdot 2^9$. Luvun $\left(2^{22}\right)^{45}$ kaksi viimeistä numeroa ovat samat kuin luvun $4^{45} = 2^{90} = \left(2^{22}\right)^4 \cdot 4$ eli luvun $4 \cdot 4^4$ eli luvun $4 \cdot 56$ eli luvun 24. Koska luvun 2^9 viimeiset kaksi numeroa ovat 12, luvun 2^{999} kaksi viimeistä numeroa ovat 88. Luvun $3^{999} - 2^{999}$ kaksi viimeistä numeroa ovat siten $100 + 67 - 88 = 79$.

170. Kun käytetään edellisen tehtävän ratkaisun alussa tehtyä havaintoa, todetaan, että k:n arvoilla 1, 2, 3 ja 4 7^k:n viimeiset numerot ovat 7, 49, 43, 01. Tästä nähdään heti, että 7^{4p-1} päättyy numeroihin 43 ja on itsessään muotoa $4p - 1$. Mutta silloin 7^7, $7^{(7^7)}$ jne. päättyvät kaikki numeroihin 43, joten luku $7^{7^{7^7}} - 7^{7^7}$ päättyy kahteen nollaan.

171. Siirtelyjen jälkeen herra X:llä ja neiti C:llä on kummallakin yhtä paljon nestettä kuin ennen siirtelyjä. Näin ollen hra X on menettänyt maitoa eli nti C saanut maitoa tasan yhtä paljon kuin hra X on saanut kahvia.

172. Kuution kärjissä sijaitsevat pikkukuutiot, joita on 8, ovat ne, joiden kolme sivua on maalattu. Kuution särmillä, mutta ei kärjissä olevat pikkukuutiot tulevat maalatuiksi kahdelta sivulta. Näitä on $12(n - 2)$. Yhdeltä sivulta maalattuja ovat kuutiot, jotka rajoittuvat ison kuution sivuihin, ei kuitenkaan särmiin. Näitä on $6(n - 2)^2$. Kuutioita, jotka eivät ollenkaan tule maalatuiksi, on $(n - 2)^3$ kappaletta.

173. Ajatellaan puhelimet kytketyiksi toisiinsa kaapeleilla. Jos joka koneesta lähtee 15 kaapelia, niin kaapelinpäitä on yhteensä $15 \cdot 77$. Mutta kaapelit ovat kaksipäisiä, joten kaapelinpäiden lukumäärän pitäisi olla parillinen luku! Ristiriita, siis tehtävän kytkentä on todella mahdoton.

174. Otetaan 1. astiasta 1 kuula, 2. astiasta 2 kuulaa, 3. astiasta 4 kuulaa, 4. astiasta 8 kuulaa ja 5. astiasta 16 kuulaa. Punnitaan nämä yhdessä. Tulos on $310 + d$, missä $0 \leq d \leq 31$. Jokainen luku n, $0 \leq n \leq 31$, voidaan esittää yhdellä ja vain yhdellä tavalla muodossa $a_0+2a_1+4a_2+8a_3+16a_4$, missä jokainen $a_i = 0$ tai $a_i = 1$. (Tällaisia lukuja on $2^5 = 32$ kappaletta, ne ovat kaikki nollan ja 31:n välillä, ja jos $a_0+2a_1+4a_2+8a_3+16a_4 = b_0 + 2b_1 + 4b_2 + 8b_3 + 16b_4$, on oltava $a_4 = b_4$ (muuten toinen puoli olisi < 16 ja toinen ≥ 16, $a_3 = b_3$ jne.) Kun d kirjoitetaan tähän muotoon, niin ne kertoimet a_i, joille $a_i = 1$ ilmaisevat ne astiat, joissa oli 11 g:n kuulia.

175. Tulos 40 voidaan saada seuraavilla yhdistelmillä: a) 7, 7, 7, 9, 10, b) 7, 7, 8, 8, 10, c) 7, 7, 8, 9, 9, d) 7, 8, 8, 8, 9 ja e) 8, 8, 8, 8, 8. Kohtien a) ja d) tulokset voidaan saada 20:stä eri järjestyksestä (esim. 10 voi olla mikä hyvänsä viidestä laukauksesta ja sen jälkeen 9 mikä hyvänsä neljästä muusta). Tapauksissa b) ja c) eri järjestyksiä on 30: esim. 10 on mikä hyvänsä viidestä mahdollisesta, ja on kuusi tapaa valita kaksi kahdeksikon paikkaa neljästä jäljelle jääneestä. Eri laukaussarjamahdollisuuksia on siis $20+30+30+20+1 = 101$ kappaletta.

176. 1. operaatio: tehdään vaihdot $1 \leftrightarrow n$, $2 \leftrightarrow n-1, \ldots$ Jos n on parillinen, kukaan ei jää paikoilleen, mutta jos n on pariton, oppilas numero $\dfrac{n+1}{2}$ jää paikalleen. Nyt oppilas n on jonon ensimmäinen, oppilas $n-1$ toinen jne. Annetaan sitten oppilaan n olla paikallaan ja muiden vaihtaa paikkaa seuraavasti: $n-1 \leftrightarrow 1$, $n-2 \leftrightarrow 2, \ldots$; jos n on parillinen, niin oppilas $\dfrac{n}{2}$ jää paikalleen, jos n on pariton, kukaan (paitsi oppilas n) ei jää paikalleen.

177. Jos jostain pisteestä (A) lähtisi kolme punaista janaa, esim. pisteisiin B, C ja D, niin janat BC CD ja DB ovat kaikki sinisiä. Ristiriita, siis joka pisteestä lähtee tasan kaksi punaista janaa. Olkoot janat AB ja AC punaiset ja AD, AE siniset. Silloin BC on punainen ja ED on sininen. Nyt DC on joko sininen tai punainen. Jos se on punainen, on CE sininen, BE punainen ja BD sininen. Tässä tapauksessa murtoviiva $ABEDCA$ on punainen ja $AECBDA$ sininen. Jos taas DC on sininen, saadaan samoin perustein, että $ABDECA$ on punainen ja $ADCBEA$ sininen. Pisteestä A lähtevistä neljästä murtoviivasta voidaan valita kaksi punaista kuudella eri tavalla. Jokaista tällaista valintaa vastaa edellä sanotun perusteella kaksi eri väritysmahdollisuutta; värityksiä on siis yhteensä 12 erilaista.

178. Tehtävän väitteessä esiintyy kokonaisluku n: käytetään siis matemaattista induktiota. Kun $n = 1$, väite muuttuu identtiseksi yhtälöksi

$$1^2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}.$$

Tehdään sitten induktio-oletus: väite on tosi, kun yhtälön kokonaislukumuuttujalla on arvo n:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

Jos näin on, niin

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 = \frac{n+1}{6}(2n^2 + n + 6n + 6)$$
$$= \frac{(n+1)(2n+3)(n+2)}{6} = \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}.$$

Koska saatiin väitöksen kaava "seuraavalla" kokonaisluvulla $n+1$, ja koska kaava varmasti päti "ensimmäisellä" kyseeseen tulevalla kokonaisluvulla, kaava pätee kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla n.

179. Tulo P_n voidaan laskea: koska

$$1 + 2 + \ldots + (n-1) = \frac{(n-1)n}{2} = \frac{1}{2}(n^2 - n),$$

niin

$$P_n = a \cdot aq \cdot aq^2 \cdot \ldots \cdot aq^{n-1} = a^n q^{1+2+3+\ldots+(n-1)} = a^n q^{\frac{1}{2}(n^2-n)} = \left(aq^{\frac{1}{2}(n-1)}\right)^n.$$

Toisaalta

$$S_n = a\frac{1-q^n}{1-q}$$

ja

$$T_n = \frac{1}{a}\frac{1-\left(\frac{1}{q}\right)^n}{1-\frac{1}{q}} = \frac{1}{aq^{n-1}}\frac{1-q^n}{1-q}.$$

Tästä seuraa

$$\frac{S_n}{T_n} = a^2 q^{n-1} = P_n^{\frac{2}{n}}.$$

Siis

$$P_n = \left(\frac{S_n}{T_n}\right)^{\frac{n}{2}}.$$

180. Jonon luvut ovat muotoa $44\ldots488\ldots8+1$, missä nelosia ja kahdeksikkoja on yhtä paljon. Jos kahdeksikkoja on n kappaletta, niin luku on $4a10^n + 8a + 1$, missä

$$a = 1 + 10 + 10^2 + \ldots + 10^{n-1} = \frac{10^n - 1}{9}.$$

Luku on siis

$$\frac{4}{9}(10^{2n} - 10^n) + \frac{8}{9}(10^n - 1) + 1 = \frac{4}{9}10^{2n} + \frac{4}{9}10^n + \frac{1}{9} = \left(\frac{2\cdot 10^n + 1}{3}\right)^2$$

Sulkeissa oleva luku on kokonaisluku, koska osoittaja on luku, jonka numeroiden summa on 3 ja joka siis on jaollinen nimittäjällä 3.

181. Jälkimmäinen yhtälö sama kuin

$$(x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = 7$$

eli jos merkitään $u = x^2 + y^2$ ja $v = xy$, sama kuin

$$u^2 - 2v^2 = 7. \tag{1}$$

Jos ensimmäinen yhtälö korotetaan puolittain neliöön, saadaan samoilla merkinnöillä

$$u + 2v = 1.$$

Kun tästä ratkaistaan u ja sijoitetaan yhtälöön (1), saadaan

$$v^2 - 2v - 3 = 0,$$

ja $v = 3$ tai $v = -1$. Jos olisi $v = 3$, olisi $u = -5$. Tämä on mahdotonta, koska u on kahden neliön summana aina ei-negatiivinen. Ainoa mahdollisuus on $v = -1$, $u = 3$. Yhtälöparin

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 3 \\ xy &= -1 \end{aligned}$$

ratkaisu on rutiinitehtävä; ratkaisuiksi saadaan neljä $(u,\, v)$-paria

$$\begin{gathered} \left(\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}),\, \frac{1}{2}(1-\sqrt{5})\right), \qquad \left(\frac{1}{2}(1-\sqrt{5}),\, \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})\right) \\ \left(\frac{1}{2}(-1+\sqrt{5}),\, \frac{1}{2}(-1-\sqrt{5})\right), \qquad \left(\frac{1}{2}(-1-\sqrt{5}),\, \frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})\right). \end{gathered}$$

Kokeilemalla todetaan, että vain kaksi ensimmäistä paria toteuttaa alkuperäisen yhtälöparin.

182. Tehtävän yhtälö saadaan neliöksi täydentämällä muotoon

$$(x + 2\cos(xy))^2 + 4(1 - \cos^2(xy)) = 0.$$

Koska molemmat yhteenlaskettavat ovat ei-negatiivisia, on oltava

$$x + 2\cos(xy) = 0, \qquad \cos^2(xy) = 1.$$

Siis $\cos(xy) = \pm 1$. Jos $\cos(xy) = 1$, niin $x = -2$ ja $y = k\pi$, k kokonaisluku. Jos taas $\cos(xy) = -1$, niin $x = 2$ ja $y = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, k kokonaisluku.

183. Jos $(n!)^2$:n tekijät kirjoitetaan uuteen järjestykseen niin, että parittomille järjestysluvuille tulevat luvut 1, 2, ..., n ja parillisille n, $n-1$, ..., 2, 1, niin huomataan, että

$$(n!)^2 = \prod_{k=1}^{n} (k(n-k+1)).$$

Tehtävän epäyhtälö tulee todistetuksi, jos osoitetaan, että $k(n-k+1) \geq n$ kaikilla $k = 1$, 2, ..., n ja että $k(n-k+1) > n$ jollakin k. Mutta

$$nk - k^2 + k - n = (n-k)(k-1).$$

Yhtälön oikean puolen tulo on aina ei-negatiivinen ja aidosti positiivinen, kun $k = 2$.

184. Väite on suora seuraus aritmeettisen ja geometrisen keskiarvon välisestä epäyhtälöstä: oletuksen perusteella lukujen x_1, x_2, ..., x_n geometrinen keskiarvo on 1, joten

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geq 1.$$

– Aritmeettisen ja geometrisen keskiarvon välistä epäyhtälöä ei tarvitse perustella

185. Tapoja muodostaa 26 kortin pakka, jossa on tasan kaksi ässää on $\binom{48}{24} \cdot \binom{4}{2}$, koska jokainen tällainen pakka voidaan muodostaa valitsemalla 24 kortin joukko 48:sta mahdollisesta (muut kuin ässät) ja 2 kortin joukko 4:stä mahdollisesta (ässät). Jakojen määrä on puolet edellisestä luvusta, eli $3\binom{48}{24} = 96\,442\,811\,049\,300$ koska jokaisessa jaossa tulee käytetyksi kaksi 26 kortin yhdistelmää. (Jos ”jaossa” otetaan huomioon, kumpi pakan osa on ensimmäinen ja kumpi toinen, tehtävän vastaus olisi $6\binom{48}{24}$.) – Vastaukseksi riittää $3 \cdot \binom{48}{24}$.

186. Jokainen ensimmäisen parven suorapari ja jokainen toisen parven suorapari muodostavat yhden suunnikkaan ja jokainen suunnikas määrittää yksikäsitteisesti kaksi tällaista suoraparia. Edellisiä pareja on $\binom{n}{2}$ kappaletta ja jälkimmäisiä $\binom{m}{2}$ kappaletta. ”Parien pareja” eli suunnikkaita on näin ollen

$$\binom{n}{2} \cdot \binom{m}{2} = \frac{n(n-1)m(m-1)}{4}$$

kappaletta.

187. Luvun q tekijät ovat 1 ja kaikki mahdolliset tulot $p_{i_1} p_{i_2} \cdot \ldots \cdot p_{i_k}$. Eri indeksijoukot $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ antavat eri tekijät (ja tyhjä joukko ykkösen). Tekijöiden määrä on siten täsmälleen sama kuin joukon $\{1, 2, \ldots, n\}$ osajoukkojen määrä eli 2^n.

188. Olkoon kolmio ABC ja leikatkoon P:n kautta kulkeva AB:n suuntainen suora BC:n pisteessä D ja P:n kautta kulkeva AC:n suuntainen suora BC:n pisteessä E. Olkoon pikkukolmioista sen, joka rajoittuu AB:hen, ala T_1, ja sen, joka rajoittuu BC:hen ala T_2. Koska kolme pikkukolmiota ovat kaikki yhdenmuotoisia ABC:n kanssa ja yhdenmuotoisten kuvioiden pinta-alat suhtautuvat toisiinsa kuten vastinsivujen neliöt, niin

$$\sqrt{\frac{T_1}{T}} = \frac{BD}{BC} \qquad \sqrt{\frac{T_2}{T}} = \frac{EC}{BC} \qquad \sqrt{\frac{T_3}{T}} = \frac{DE}{BC}.$$

Täten

$$\sqrt{T_1} + \sqrt{T_2} + \sqrt{T_3} = \frac{BD + EC + DE}{BC}\sqrt{T} = \sqrt{T}$$

ja

$$T = (\sqrt{T_1} + \sqrt{T_2} + \sqrt{T_3})^2.$$

189. Olkoon kulman puolikas α ja r ja $R > r$ kahden toisiaan sivuavan ympyrän säteet. Jos r-säteisen ympyrän keskipisteen etäisyys kulman kärjestä on a, niin

$$r = a\sin\alpha, \qquad R = (a + r + R)\sin\alpha.$$

Näistä yhtälöistä seuraa

$$\frac{r}{R} = \frac{1 - \sin\alpha}{1 + \sin\alpha},$$

joten ympyräketjun peräkkäisten ympyröiden säteiden suhde on vakio.

190. Koska

$$\frac{\sin x + \tan x}{\cos x + \cot x} = \frac{\sin x + \dfrac{\sin x}{\cos x}}{\cos x\left(1 + \dfrac{1}{\sin x}\right)},$$

lauseke on määritelty vain, kun $\cos x \neq 0$, $\sin x \neq 0$ ja $\sin x \neq -1$. Tällöin tehtävän lauseke on

$$\frac{\sin^2 x(1 + \cos x)}{\cos^2 x(1 + \sin x)}.$$

Tämä on aina ei-negatiivinen, koska $\cos x = -1$ vain kun $\sin x = 0$.

191. Vertaamalla kulmaa x vastaavaa yksikkösäteisen ympyrän kaarta 1-hypotenuusaisen x-kulmaisen suorakulmaisen kolmion x-kulmaa vastaavaan kateettiin nähdään, että $x > \sin x$ ja siis myös $\cos x > \sin\cos x$. Kosinifunktio on välillä $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ vähenevä, joten $\cos x < \cos\sin x$. Yhdessä nämä kaksi epäyhtälöä tuottavat väitetyn epäyhtälön $\sin\cos x < \cos\sin x$.

192. Olkoon $A(n)$ sellaisten ykkösistä ja kakkosista muodostuvien lukujonojen, joiden jäsenten summa on n, lukumäärä. On todistettava, että $A(1000) > 10^{150}$. Selvästi $A(1) = 1$ ja $A(2) = 2$. Jos $n > 2$, niin jokainen jono, jonka termien summa on n, saadaan liittämällä 1 viimeiseksi termiksi jonoon, jonka termien summa on $n-1$ tai liittämällä 2 viimeiseksi termiksi jonoon, jonka termien summa on $n-2$ ja jokaisesta jonosta, jonka termien summa on $n-2$ tai $n-1$ saadaan jono, jonka termien summa on n vastaavalla tavalla. Tästä seuraa, että $A(n) = A(n-1) + A(n-2)$. Osoitetaan induktiolla, että $A(2n) > 2^n$. Tämä kaava on voimassa, kun $n = 2$, sillä $A(4) = A(3) + A(2) > 2A(2) = 4$. Oletetaan, että kaava pätee. Silloin $A(2n+2) > 2A(2n) \geq 2^{n+1}$. Erityisesti $A(1000) > 2^{500} = (2^{10})^{50} > (10^3)^{50} = 10^{150}$.

193. Kulma PQR on ympyrän C_1 kehäkulmana puolet kulmasta PZ_1R ja kulma PQS on ympyrän C_2 kehäkulmana puolet kulmasta PZ_2S. Koska kulmat PZ_1R ja PZ_2S oletettiin yhtä suuriksi, on myös $\angle PQR = \angle PQS$, eli Q, S ja R ovat samalla suoralla.

194. Heti nähdään, että $x = 2001$ on eräs ratkaisu, ja että jokaiselle mahdolliselle ratkaisulle on oltava voimassa $x \geq 1988$. Merkitään $y = x - 2001$ ja etsitään yhtälölle

$$\sqrt{1+\frac{y}{15}} + \sqrt{1+\frac{y}{14}} + \sqrt{1+\frac{y}{13}} = \sqrt{1+\frac{y}{1986}} + \sqrt{1+\frac{y}{1987}} + \sqrt{1+\frac{y}{1988}}$$

ehdon $-13 \leq y < 0$ tai $0 < y$ toteuttavia ratkaisuja. Mutta tällaisia ei selvästikään voi olla olemassa, koska negatiivisilla y:n arvoilla vasen puoli on varmasti oikeaa pienempi ja positiivisilla y:n arvoilla oikea puoli on vasenta pienempi.

195. Todistetaan epäsuorasti. Oletetaan, että kaikki n osallistujaa ovat puheenjohtajana samassa määrässä työryhmiä; olkoon tämä määrä s. Koska työryhmiä on $\binom{n}{p}$ kappaletta, on $ns = \binom{n}{p}$ Tästä seuraa, että

$$\frac{1}{n}\binom{n}{p} = \frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)}{1\cdot 2\cdots p}$$

on kokonaisluku, ja p on osoittajan tekijä. Kirjoitetaan osoittaja auki n:n polynomiksi. Koska p on n:n tekijä, p:n täytyy olla tekijä myös tämän polynomin vakiotekijässä $(-1)^{p-1}(p-1)!$. Koska p on alkuluku, tämä on mahdotonta.

196. Jaetaan tekijöihin:

$$n^4 - 20n^2 + 4 = (n^2-2)^2 - 16n^2 = (n^2-2-4n)(n^2-2+4n).$$

Helposti nähdään, että yhtälöiden

$$n^2 - 2 \pm 4n = \pm 1$$

ratkaisut ovat muita kuin kokonaislukuja, joten kumpikaan tulon tekijä ei ole ± 1 millään kokonaisluvulla n.

197. Varmasti kaikki ne neliköt, joissa yksi luvuista x, y, z on sama kuin t ja kaksi muuta ovat toistensa vastalukuja, ovat tehtävän ratkaisuja. Osoitetaan, että muita ratkaisuja ei ole. Jälkimmäinen tehtävän yhtälöistä on sama kuin

$$\frac{yz + zx + xy}{xyz} = \frac{1}{t}$$

eli

$$\begin{aligned} 0 = (x+y+z)(yz+zx+xy) - xyz &= x^2y + x^2z + y^2z + xy^2 + yz^2 + xz^2 + 2xyz \\ &= (x+y)(y+z)(z+x). \end{aligned}$$

Luvuista x, y ja z on todellakin kahden oltava vastalukuja, jolloin kolmas on välttämättä sama kuin t.

198. Jos $m = 1$, niin selvästikin $n = 1$ ja $n = 2$ ovat ratkaisuja. Jos $m = 2$, niin $n = 3$ kelpaa. Osoitetaan, että muita ratkaisuja ei ole. Olkoon sitten $m \geq 3$ (ja $n \geq 4$). Jos olisi $3^m - 2^n = -1$, niin olisi $3^m \equiv -1 \bmod 8$ (koska $n > 3$). Mutta on helppo huomata, että aina joko $3^m \equiv 1 \bmod 8$ tai $3^m \equiv 3 \bmod 8$. Jos taas olisi $3^m \equiv 1 \bmod 8$, olisi m parillinen, $m = 2k$, $k > 1$, ja $2^n = 3^{2k} - 1 = (3^k - 1)(3^k + 1)$. Mutta silloin $3^k + 1 = 2^r$ jollakin $r > 3$. Tämä merkitsee edellä mahdottomaksi todettua tilannetta $3^k - 2^r = -1$.

199. Jonon yleinen luku on muotoa

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} 10^{4k}.$$

Jos n on pariton, $n = 2m + 1$, niin

$$a_n = \sum_{k=0}^{m} (10^{8k} + 10^{8k+4}) = (1 + 10^4) \sum_{k=0}^{m} 10^{8k}.$$

Kun $m > 0$, tämä luku on yhdistetty. Kun $m = 0$, saadaan luku $a_1 = 10001 = 73 \cdot 137$. Jos n on parillinen, $n = 2m$, $m > 0$, saadaan

$$\begin{aligned} a_n = \sum_{k=0}^{2m} 10^{4k} &= \frac{1 - 10^{4(2m+1)}}{1 - 10^4} = \frac{1 - 10^{2(2m+1)}}{1 - 10^2} \cdot \frac{1 + 10^{2(2m+1)}}{1 + 10^2} \\ &= (1 + 10^2 + \ldots 10^{2(2m)})(1 - 10^2 + 10^4 - \ldots 10^{2(2m)}). \end{aligned}$$

200. On oltava

$$P(x) = (x^2 + 1)Q(x) = (x^3 + x^2 + 1)R(x) - 1,$$

missä Q ja R ovat polynomeja. Olkoon $Q(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_kx^k$ ja $R(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_{k-1}x^{k-1}$. Kaksi x:n polynomia ovat samat ainoastaan, jos jokaisen x:n potenssin kertoimet ovat samat. Jos $k = 1$, eli $Q(x) = a + bx$ ja $R(x) = c$, olisi

$$bx^3 + ax^2 + bx + a = cx^3 + cx^2 + c - 1,$$

josta seuraisi $b = 0$ ja $b = c$ sekä ristiriita $c = a = c - 1$. Kokeillaan $k = 2$. Jotta yhtälö

$$(x^2+1)(ax^2+bx+c) = (x^3+x^2+1)(dx+e) - 1$$

toteutuisi, on oltava

$$a = d, \qquad b = e + d, \qquad a + c = e, \qquad b = d, \qquad c = e - 1.$$

Toisesta ja neljännestä yhtälöstä seuraa $e = 0$, viimeisestä $c = -1$, kolmannesta, ensimmäisestä ja toisesta $a = b = d = 1$. Polynomiksi P kelpaa siis

$$P(x) = (x^2+1)(x^2+x-1).$$

201. Osoitetaan Eukleideen algoritmin avulla, että murtolausekkeen osoittajan ja nimittäjän suurin yhteinen tekijä on 1:

$$\begin{aligned} n^4 + 3n^2 + 1 &= n(n^3+2n) + (n^2+1) \\ n^3 + 2n &= n(n^2+1) + n \\ n^2 + 1 &= n \cdot n + 1. \end{aligned}$$

Koska viimeinen jakojäännös oli 1, lukujen suurin yhteinen tekijä on 1, eikä murtolukua voi supistaa.

202. Selvästi $P(x) = x$ on eräs ehdon toteuttava polynomi. Lisäksi kokeilemalla huomataan, että esim. $P(1) = P(0^2+1) = P(0)^2+1 = 0$, $P(2) = P(1^2+1) = P(1)^2+1 = 2$, $P(5) = P(2^2+1) = P(2)^2+1 = 5$ jne. Määritellään induktiivisesti päättymätön lukujono (x_n) asettamalla $x_0 = 0$ ja $x_{k+1} = x_k^2 + 1$ kaikilla luonnollisilla luvuilla k. Osoitetaan, että $P(x_n) = x_n$ kaikilla n. Väite on tosi, kun $k = 0$ (ja kun $k = 1$ ja $k = 2$). Oletetaan, että $P(x_k) = x_k$. Silloin $P(x_{k+1}) = P(x_k^2+1) = P(x_k)^2+1 = x_k^2+1 = x_{k+1}$. Mutta jos P on astetta m oleva polynomi, niin astetta m olevalla polynomilla $P(x) - x$ on äärettömän monta nollakohtaa. Tämä on mahdollista vain, jos polynomi on identtisesti nolla, eli jos $P(x) = x$.

203. Olkoon suunnikas $ABCD$ ja sivuille AB, BC, CD ja DA piirrettyjen neliöiden keskipisteet P, Q, R ja S. Tarkastellaan kolmioita PSA ja PQB. Niissä on $AP = PB$ ja $AS = BQ$. Lisäksi $\angle PAS = 45° + \angle BAD + 45° = \angle PBQ$, koska neliöiden sivujen väliin jäävän kulman molemmat kyljet ovat kohtisuorassa kulman BAD kylkiä vastaan. Kolmiot PAS ja PBQ ovat yhtenevät. Siis $PS = PQ$. Lisäksi kolmiot saadaan toisikseen 90°:n kierrolla pisteen P ympäri. Tästä seuraa, että $PQ \perp PS$. Sama päättely pätee kaikkiin nelikulmion $PQRS$ vierekkäisiin sivuihin, joten nelikulmion on oltava neliö.

204. Valitaan nelikulmion lävistäjien leikkauspiste O origoksi. Nelikulmion kärkien paikkavektorit ovat $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $t\mathbf{a}$ ja $s\mathbf{b}$, missä $t < 0$, $s < 0$. Nelikulmion sivujen keskipisteiden paikkavektorit ovat

$$\frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}), \quad \frac{1}{2}(\mathbf{b}+t\mathbf{a}), \quad \frac{1}{2}(t\mathbf{a}+s\mathbf{b}), \quad \frac{1}{2}(s\mathbf{b}+\mathbf{a}).$$

Vastakkaisten sivujen keskipisteiden yhdistysjanojen keskipisteiden paikkavektorit ovat siten

$$\frac{1}{4}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+t\mathbf{a}+t\mathbf{b}) \quad \text{ja} \quad \frac{1}{4}(\mathbf{b}+t\mathbf{a}+s\mathbf{b}+\mathbf{a}).$$

Lävistäjien keskipisteet ovat

$$\frac{1}{2}(\mathbf{a}+t\mathbf{a}) \quad \text{ja} \quad \frac{1}{2}(\mathbf{b}+s\mathbf{b}).$$

Näiden pisteiden välisen janan keskipiste on

$$\frac{1}{4}(\mathbf{a}+t\mathbf{a}+\mathbf{b}+s\mathbf{b}.$$

Väite seuraa.

205. Olkoon K sellainen janan AM piste, että $MK{=}MB$. Tarkastellaan kolmioita ABK ja CBM. Selvästi$AB = BC$. Koska $\angle BMK = 60^\circ$ (kaarta AB vastaava kehäkulma; $= \angle BCA$), kolmio BMK on tasasivuinen. Siis $BK = MB$. Lisäksi $\angle BKA = 120^\circ = \angle BMC$. Siis kolmiot ABK ja CBM ovat yhtenevät, ja $AM = AK + KM = CM + BM$.

206. Jos kolmion sivut ovat a, b ja c sekä kulmat α, β ja γ, niin yleistetyn sinilauseen perusteella $a = 2R\sin\alpha$ ja $b = 2R\sin\gamma$. Siis

$$T = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = 2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$$

ja väite tulee todistetuksi, jos osoitetaan, että

$$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma \le \frac{3}{4}.$$

Tämä epäyhtälö nähdään todeksi esim. seuraavasti: koska $\gamma = \pi - (\alpha+\beta)$, niin

$$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma = \sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta) = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))\sin(\alpha+\beta)$$
$$= \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta) - \frac{1}{4}\sin 2(\alpha+\beta) \le \frac{1}{2}+\frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

207. Olkoon kolmion ABC ympäri piirretyn ympyrän keskipiste O. Kolmiot OAB, OBC ja OCA ovat tasakylkisiä. Jos O on myös kolmion sisään piirretyn ympyrän keskipiste eli jos O on kolmion kulmien puolittajien leikkauspiste, niin

$$\angle ABO = \angle OBC = \angle OCB = \angle OCA.$$

Tästä seuraa, että kaikki kolme lueteltua tasakylkistä kolmiota ovat yhteneviä, josta puolestaan seuraa väitetty relaatio $AB = BC = CA$.

208. Oletetaan, että $AB = AC$, kolmion ABC sisään piirretyn ympyrän keskipiste on I ja ympäri piirretyn ympyrän keskipiste on O. Pistet A, I ja O ovat samalla suoralla; oletetaan että tämä suora leikkaa kolmion ympäri piirretyn ympyrän (myös) pisteessä D. Pisteen I kohtisuora projektio sivulla AB olkoon E. Koska piste I on kulman ABC puolittajalla, niin $\angle BID = \dfrac{1}{2}(\angle ABI + \angle BAI)$ (kolmion kulman vieruskulma on kolmion kahden muun kulman summa). Toisaalta kulma CBD on yhtä suuri kuin kulma CAD eli puolet kulmasta BAC, joten myös $\angle IBD = \dfrac{1}{2}(\angle ABI + \angle BAI)$. Kolmio DIB on tasakylkinen, $BD = DI$. Toisaalta suorakulmaiset kolmiot ABD ja AEI ovat yhdenmuotoiset. Jos O on janalla AI, niin $OI = R + d$ ja $ID = BD = R - d$. Kolmioiden yhdenmuotoisuuden perusteella

$$\frac{r}{R+d} = \frac{R-d}{2R}, \tag{1}$$

josta ratkaistaan $d^2 = R^2 - 2rR$. Jos I puolestaan on janalla AO, on $OI = R - d$ ja $ID = R + d$. Johdutaan yhtälöön

$$\frac{r}{R-d} = \frac{R-d}{2R},$$

joka on yhtäpitävä yhtälön (1) kanssa.

Jatkotehtävä: osoita, että väite pätee myös ilman kolmion tasakylkisyydestä tehtyä oletusta!

209. Merkitään $x = a + b$, $y = c + d$. Koska $x \leq y$ ja $x + y = 30$, niin $2 \leq x \leq 15$. Jos olisi $x = 15$, olisi $y = 15$ ja $c \leq 7$ ja edelleen $x = c + d \leq 14$. Siis $2 \leq x \leq 14$ ja $16 \leq y \leq 28$. Nyt

$$ab \leq \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{x^2}{4}, \quad bc \leq \frac{(c+d)^2}{4} = \frac{y^2}{4}.$$

Siis

$$abcd \leq \frac{x^2y^2}{16},$$

ja yhtäsuuruus vallitsee vain, kun $a = b$ ja $c = d$. Toisaalta $f(x) = x(30 - x)$ saa välillä $[2, 14]$ maksimiarvon, kun $x = 14$. Kysytty tulo on mahdollisimman suuri, kun $a = b = 7$ ja $c = d = 8$.

210. Jos todistettavan epäyhtälön vasemman puolen osoittaja ja nimittäjä jaetaan $\sqrt{xy}$:llä, lauseke saa muodon

$$\frac{xy}{x+y+2} = \frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{\dfrac{x}{y}} + \sqrt{\dfrac{y}{x}} + \dfrac{2}{\sqrt{xy}}}.$$

Koska $t + t^{-1} \geq 2$ ja yhtäsuuruus pätee vain, kun $t = 1$, tutkittava lauseke on enintään

$$\frac{\sqrt{xy}}{2 + \dfrac{2}{\sqrt{xy}}}.$$

ja tasan näin paljon, kun $x = y = \sqrt{2}$. Lisäksi

$$xy \le \frac{1}{2}(x^2 + y^2) = 2,$$

(yhtäsuuruus vain, kun $x = y$) joten tutkittava lauseke on enintään

$$\frac{\sqrt{2}}{2 + \dfrac{2}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(2 - \sqrt{2})}{2} = \sqrt{2} - 1.$$

211. Koska yhtälön juuret ovat reaaliset, niin yhtälön diskriminantti on ei-negatiivinen: $a^2 - 4a \ge 0$. Koska s ja t toteuttavat yhtälön, niin

$$s^2 + t^2 = as - a + at - a = a(s + t) - 2a.$$

Mutta $s + t = a$, joten $a(s + t) - 2a \ge 2(s + t)$ on yhtäpitävä epäyhtälön $a^2 - 2a \ge 2a$ kanssa ja siis tosi.

212. Olkoot kolmion kulmat α, β ja γ ja olkoon I_a sen sivuympyrän keskipiste, joka sivuaa BC:tä ja sivujen AB ja AC jatkeita; olkoon r_a tämän ympyrän säde. Piste I_a on silloin yhtä aikaa kulman A ja kulmien B ja C vieruskulmien puolittajilla. Olkoon I kolmion ABC sisään piirretyn ympyrän keskipiste. Tällöin

$$\angle ICI_a = \frac{\gamma}{2} + \frac{\alpha + \beta}{2} = 90^\circ.$$

Ympyrä, jonka halkaisija on II_a kulkee siis pisteen C (ja samoin pisteen B) kautta. Olkoon tämän ympyrän keskipiste M. Jos ρ on tämän ympyrän säde, niin

$$r_a \le |I_aC| \le 2\rho. \tag{1}$$

Kehäkulmalauseen perusteella saadaan $\angle II_aC = \angle IBC = \dfrac{\beta}{2}$. Siis $\angle AMC = \beta$. Mutta tästä seuraa, että M on kolmion ABC ympäri piirretyllä ympyrällä. Siis $|MC| = \rho \le 2R$. Tästä ja epäyhtälöstä (1) seuraa $r_a \le 4R$.

213. Käytetään binomikaavaa:

$$19^{88}-1 = (20-1)^{88}-1 = \sum_{k=0}^{88}\binom{88}{k}(-1)^k4^k5^k-1 = -88\cdot4\cdot5+\binom{88}{86}4^25^2+4^3\sum_{k=3}^{88}(-1)^k4^{k-3}5^k.$$

Koska tässä ensimmäinen yhteenlaskettava on jaollinen 8·4:llä eli 32:lla, mutta jälkimmäiset yhteenlaskettavat 4^3:lla eli 64:llä, korkein 2:n potenssi, jolla $19^{88} - 1$ on jaollinen on 2^5. Samoin saadaan

$$19^{88} - 1 = (18 + 1)^{88} - 1 = \sum_{k=0}^{88}\binom{88}{k}2^k3^{2k} - 1 = \binom{88}{1}2 \cdot 9 + 3^4\sum_{k=2}^{88}\binom{88}{k}3^{2(k-2)}2^k,$$

joten $19^{88} - 1$ on jaollinen 3^2:lla, mutta ei korkeammilla 3:n potensseilla. Vaadittua muotoa olevat tekijät ovat siten luvut 2^s3^r, missä $1 \le s \le 5$ ja $r = 1$ tai $r = 2$. Näiden lukujen summa on $(3 + 3^2) \cdot (2 + 4 + 8 + 16 + 32) = 744$.

214. Olkoon kolmion ABC kulmanpuolittajien leikkauspiste I ja olkoon A'' pisteen A' peilikuva suoran BB' suhteen. Piste on sivulla BA, koska $\angle BIA' = \frac{1}{2}\angle BAC + \frac{1}{2}\angle ABC < 90^\circ < \angle BIA$. Olkoon D sisään piirretyn ympyrän ja sivun AC sivuamispiste. Nyt piste I on kolmion $A'B'A''$ sisällä (ellei olisi, niin joko jana $A'A''$ jäisi kokonaan suoran BIB' toiselle puolelle, mikä on konstruktion mukaan mahdotonta, tai A olisi janalla BA'', joka myös todettiin edellä mahdottomaksi), ja piste D kolmion $A'B'A''$ ulkopuolella. Siis DI leikkaa kolmion $A'B'A''$ piirin eli joko $A'B'$:n tai $A''B'$:n. Mutta jos jana, jonka päätepisteet ovat ympyrän ulkopuolella, leikkaa ympyrän säteen, niin se leikkaa myös ympyrän kehän. Siis joko $A'B'$ tai $A''B'$ leikkaa sisään piirretyn ympyrän kehän. Mutta sekä sisään piirretty ympyrä että janat $A'B'$ ja $A''B'$ ovat symetrisiä suoran $B'B$ suhteen. Jos siis toinen jana leikkaa ympyrän, leikkaa toinenkin! Välttämättä $A'B'$ ja ympyrä leikkaavat toisensa.

215. Olkoon $P(a) = 0$. Silloin $\dfrac{1}{a}$ ja $1-a$ ovat P:n nollakohtia, samoin kuin $\dfrac{1}{1-a}$ ja $1-\dfrac{1}{a} = \dfrac{a-1}{a}$ sekä vielä $\dfrac{a}{a-1}$. Tällöin $a \neq 0$ ja $a \neq 1$. Koska polynomi on viidettä astetta, nollakohdista ainakin kaksi on samoja; paritonasteisena ja reaalikertoimisena yhtälöllä on ainakin yksi reaalijuuri.

Tapaus 1: $a = \dfrac{1}{a}$. Koska $a \neq 1$, on oltava $a = -1$. Muut juuret ovat $\dfrac{1}{2}$ ja 2.

Tapaus 2: $a = 1-a$. Silloin $a = \dfrac{1}{2}$, ja ratkaisut ovat samat kuin tapauksessa 1.

Tapaus 3: $a = \dfrac{a}{a-1}$ Tällöin $a = 2$, ja palataan tapaukseen 1.

Tapaus 4: $a = \dfrac{1}{a-1}$ eli $a^2 - a + 1 = 0$. Silloin $a = \dfrac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. Tällöin $a = \dfrac{a}{1-a} = 1 - \dfrac{1}{a}$ ja $\dfrac{1}{a} = 1 - a = \dfrac{a}{a-1}$; jos $a_1 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$ on nollakohta, niin myös $a_2 = \dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$ on nollakohta.

Tapaus 5: $a = 1 - \dfrac{1}{a}$. Palautuu tapaukseen 4.

Edellisen tarkastelun perusteella reaaliset nollakohdat ovat välttämättä -1, 2 ja $\dfrac{1}{2}$. Jos kompleksisia nollakohtia on, ne ovat yhtälön $a^2 - a + 1 = 0$ ratkaisuja. Tästä seuraa, että joko

$$P(x) = (x+1)^\alpha (x-2)^\beta \left(x - \frac{1}{2}\right)^\gamma,$$

missä $\alpha + \beta + \gamma = 5$ tai

$$P(x) = (x+1)(x-2)\left(x - \frac{1}{2}\right)(x^2 - x + 1).$$

216. Osoitetaan ensin, että f on injektio, tsėttä ehdosta $f(x) = f(y)$ seuraa aina $x = y$: jos nimittäin $f(x) = f(y)$, niin $f(f(x)) = f(f(y))$, jolloin myös $2x + 6 = 2y + 6$ ja $x = y$.

Olkoon $f(0) = a$. Silloin $f(a) + a = 6$, joten $f(a) = 6 - a$. Siis $0 \le a \le 6$. Nyt $f(f(a)) + f(a) = 2a + 6$ eli $f(6-a) + 6 - a = 2a + 6$ eli $f(6-a) = 3a$. Edelleen $f(f(6-a)) + f(6-a) = 18 - 2a$ ja $f(3a) + 3a = 18 - 2a$ eli $f(3a) = 18 - 5a$. Koska $f(3a) \ge 0$, on $a \le \dfrac{18}{5}$ eli $a \le 3$. Toisaalta $f(f(3a)) + f(3a) = 6a + 6$ eli $f(18-5a) + 18 - 5a = 6a + 6$. Siis $f(18-5a) = 11a - 12$. Tästä seuraa, että $a \ge 2$. Käytetään vielä kerran samaa temppua: $f(f(18-5a)) + f(18-5a) = 42 - 10a$ ja siis $f(11a-12) + 11a - 12 = 42 - 10a$ eli $f(11a-12) = 54 - 21a$. Tämä merkitsee, että $a \le \dfrac{54}{21}$ eli $a \le 2$. Kaikkiaan siis $a = f(0) = 2$. Osoitetaan induktiolla, että yleisestikin $f(2k) = 2k + 2$. Tämä pätee, kun $k = 0$. Jos $f(2k) = 2k + 2$, niin $f(2k+2) + f(2k) = 4k + 6$, joten $f(2k+2) = 4k + 6 - 2k - 2 = 2(k+1) + 2$. Koska f on injektiivinen ja parillisilla argumentin arvoilla saadaan kaikki parilliset kokonaisluvut, ovat f:n arvot parittomilla argumentin arvoilla parittomia. Määritetään ensin $f(1) = b$. Silloin $f(b) + b = 8$, joten $b \le 8$. Koska b on pariton, se voi olla jokin luvuista 1, 3, 5, 7. Ei voi olla $b = 1$; silloin olisi $f(1)+b = b+1 = 8$, joka olisi ristiriita. Jos olisi $b = 5$, olisi $f(5) = 8-5 = 3$, $f(f(5)) + f(5) = f(3) + 3 = 10 + 6$ eli $f(3) = 13$ ja $f(f(3)) + f(3) = f(13) + 13 = 12$ eli $f(13) = -1$, mikä olisi ristiriita. Jos olisi $b = 7$, olisi $f(7) = 1$ ja $f(f(7)) + f(7) = f(1) + 1 = 20$, eli $f(1) = 19 > 8$. Taas ristiriita. Vain $f(1) = 3$ ei johda ristiriitaan. Induktiolla näytetään samoin kuin parillisten argumenttien tapauksessa, että $f(2k+1) = 2k + 3$. Kaikkiaan siis $f(x) = x + 2$ on ainoa mahdollinen tehtävän ehdon toteuttava funktio; se myös toteuttaa asetetut ehdot.

217. Koska $1 + x \ge 2$, riittää, kun todistetaan, että $2^n \ge 1 + \dfrac{n^2}{4}$ kaikilla $n \ge 1$. Induktiotodistus: kun $n = 1$, niin $2^n = 2 \ge 1 + \dfrac{1}{4} = 1 + \dfrac{n^2}{4}$. Oletetaan, että $2^k \ge 1 + \dfrac{k^2}{4}$. Silloin

$$2^{k+1} - 1 - \frac{(k+1)^2}{4} \ge 2 + \frac{k^2}{2} - 1 - \frac{(k+1)^2}{4} = \frac{k^2 - 2k + 3}{4} = \frac{(k-1)^2 + 2}{4} \ge 0,$$

ja induktioaskel on otettu.

218. Binomikaavan mukaan

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \cdot x^k.$$

Toisaalta, kun $k \ge 1$,

$$\binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{n-k+1}{n} \le \frac{1}{k!} \le \frac{1}{2^{k-1}}.$$

Kun käytetään tätä arviota ja geometrisen sarjan summan kaavaa, saadaan

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \le 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} x^k = 1 + x \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{2^k} < 1 + \frac{x}{1 - \dfrac{x}{2}} = \frac{2+x}{2-x}.$$

219. Jotta olisi $m^2 + 41^2 = x^2$, on oltava $x = m + k$ ja $41^2 = 2mk + k^2 = k(2m + k)$. Koska 41 on alkuluku, on tulon $k(2m + k)$ pienemmän tekijän k oltava joko 1 tai 41. Jos $k = 1$, niin $2m + 1 = 41^2 = 1681$ ja $m = 840$. Jos $k = 41$, niin $m = 0$. Vastaavalla tavalla saadaan $n = 840$ tai $n = 0$. Parit (0, 0) ja (0, 840) toteuttavat tehtävän ehdon. Sen sijaan pari (840, 840) ei kelpaa, koska $840^2 + 840^2 = 2 \cdot 840^2$, ja 2 ei ole kokonaisluvun neliö.

220. Olkoon kokonaislukumittaisen korkeusjanan mittaluku x. Erotetaan tapaukset a), b) ja c) sen mukaan, onko tarkastetavaa korkeusjanaa vastassa kolmion pisin $(x + 3)$ sivu, keskimmäinen $(x + 2)$ sivu vai lyhin $(x + 1)$ sivu. Sovelletaan jokaiseen tapaukseen Pythagoraan lausetta.

a)

$$x + 3 = \sqrt{(x + 2)^2 - x^2} + \sqrt{(x + 1)^2 - x^2} = 2\sqrt{x + 1} + \sqrt{2x + 1}.$$

Kahden neliöön korotuksen jälkeen ilmenee, että x toteuttaa kolmannen asteen yhtälön

$$x^3 - 24x - 48 = 0.$$

Koska tämän yhtälön positiiviset kokonaislukuratkaisut ovat vakiotermin 48 parillisia ja kolmella jaollisia tekijöitä, eikä yksikään luvuista 6, 12, 18, 24 ja 48 toteuta yhtälöä, ei tässä tapauksessa saada ratkaisua.

b) Koska kolmio voi olla terävä- tai tylppäkulmainen, on voimassa

$$x + 2 = \sqrt{(x + 3)^2 - x^2} \pm \sqrt{(x + 1)^2 - x^2}.$$

Kaksi peräkkäistä toiseen potenssiin korotusta antaa välttämättömän ehdon

$$x^3 - 8x^2 - 44x - 48 = 0.$$

Sen toteuttaa $x = 12$. Tämä arvo toteuttaa myös alkuperäisen yhtälön ylemmän merkkivaihtoehdon. Kolmion sivut voivat siis olla 13, 14 ja 15.

c) Nyt saadaan ehto

$$x + 1 = \sqrt{(x + 3)^2 - x^2} \pm \sqrt{(x + 2)^2 - x^2}.$$

Neliön korotukset johtavat yhtälöön

$$x^3 - 16x^2 - 56x - 48 = 0,$$

jolla ei ole kokonaislukuratkaisuja.

Ainoa ehdon toteuttava kolmio on se, jonka sivut ovat 13, 14 ja 15.

221. Tehdään vastaoletus: tehtävän p lukua ovat kaikki sellaisia, että p:llä jaettaessa saadaan positiivinen jakojäännös. Koska erisuuria jakojännöksiä on enintään $p - 1$ kappaletta, kaksi luvuista antaa saman jakojäännöksen. Lukujen erotus on silloin p:llä jaollinen. Mutta tämä erotus on muotoa $10^k \cdot x$, missä x on eräs jonon luvuista ja $k \geq 1$. Koska 10^k ei oletusten mukaan ole jaollinen p:llä, niin x:n on oltava p:llä jaollinen. Tämä on ristiriidassa tehdyn vastaoletuksen kanssa, joten vastaoletus on väärä ja väite todistettu.

222. Jos 20-paikkaisia autoja on x, 42-paikkaisia y ja 48-paikkaisia z, niin 36-paikkaisia on käytettävä $2y$ kappaletta. Koska kaikki istuimet käytetään, on

$$814 = 20x + 72y + 42y + 48z$$

eli

$$10x + 57y + 24z = 407. \tag{1}$$

Tehtävänä on minimoida bussien lukumäärä $m = x + 3y + z$ ehdon (1) vallitessa. Ehdosta (1) seuraa, että y on pariton ja koska $57y \leq 407$, niin $y \leq 7$. Tarkistetaan eri mahdollisuudet. a) $y = 1$. Silloin $10x + 24z = 350$ eli $5x + 12z = 175$. Tästä seuraa, että z on jaollinen 5:llä. Mahdollisia z:n arvoja ovat 0, 5 ja 10; vastaavat x:n arvot ovat 35, 23 ja 11. Eri yhdistelmistä pienimmän m-arvon eli 24 antaa $x = 11$, $y = 1$, $z = 10$. b) $y = 3$. Nyt $10x + 24z = 236$ eli $5x + 12z = 118$ eli $5x = 2 \cdot (59 - 6z)$. $59 - 6z$ on jaollinen viidellä vain, kun $z = 4$ tai $z = 9$. Vastaavat x:n arvot ovat 14 ja 2 ja m:n arvot 27 ja 20. c) $y = 5$. Nyt $10x + 24 = 122$ eli $5x + 12z = 61$. $61 - 12z$ on jaollinen 5:llä vain, kun $z = 3$; silloin $x = 5$ ja $m = 23$. d) $y = 7$. Nyt $10x + 24z = 8$. Tällä yhtälöllä ei ole positiivisia kokonaislukuratkaisuja. – Tarvitaan siis 20 autoa, niistä 2 20-paikkaista, 6 36-paikkaista, 3 42-paikkaista ja 9 48-paikkaista.

223. Kun $n = 1$, niin $2^{2n} + 24n - 10 = 18$. Oletetaan, että $2^{2k} + 24k - 10$ on jaollinen 18:lla. Tarkastetaan erotusta $\Delta = 2^{2(k+1)} + 24(k+1) - 10 - (2^{2k} + 24k - 10) = 3 \cdot 2^{2k} + 24 = 6(2^{2k-1} + 4) = 6(2^{2k-1} + 1 + 3)$. Koska $2^{2k-1} + 1 = (2+1)(2^{2k-2} + \ldots + 1)$, Δ on jaollinen luvulla $6 \cdot 3 = 18$.

224. Kun tehtävän neljä yhtälöä lasketaan puolittain yhteen, saadaan $4x = a + b + c + d = 4 + 8 + 12 + 16 = 40$ eli $x = 10$. Ensimmäinen ja viimeinen yhtälö antavat $a - 10 = y + z = 10 - d$ ja toinen ja kolmas yhtälö vastaavasti $b - 10 = y - z = 10 - c$. Siis $a + d = b + c = 20$, joten $\{a, d\} = \{4, 16\}$ tai $\{8, 12\}$ ja samoin $\{b, c\} = \{4, 16\}$ tai $\{8, 12\}$. Edelleen $2y = a + b - 20$ ja $y = \frac{1}{2}(a + b) - 10$ ja $2z = a - b$. Eri mahdollisuudet antavat siten seuraavat ratkaisut:

a	b	c	d	x	y	z
4	8	12	16	10	-4	-2
4	12	8	16	10	-2	-4
8	4	16	12	10	-4	2
8	16	4	12	10	2	-4
12	4	16	8	10	-2	4
12	16	4	8	10	4	-2
16	8	12	4	10	2	4
16	12	8	4	10	4	2

225. Jos T on jokin tehtävässä määritelty taso, niin pisteet P_i eivät voi kaikki olla samalla puolen T:tä (koska ne silloin tulisivat olleksi samassa tasossa). Jos pisteistä kolme, esimerkiksi P_1, P_2 ja P_3 ovat T:n samalla puolella, niin T on yhdensuuntainen tason $\tau = P_1P_2P_3$

kanssa. Tasoja T, joilla olisi tämä ominaisuus ja jotka olisivat yhtä etäällä τ:sta ja P_4:stä on täsmälleen yksi. Koska pisteet voidaan neljällä tavalla jakaa kolmen ja yhden pisteen ryhmiin, on kaikkiaan neljällä eri tasolla edellä kuvailtu ominaisuus. Jos T:n kummallakin puolella on kaksi pistettä, esim. P_1 ja P_2 toisella ja P_3 ja P_4 toisella, niin T on suorien P_1P_2 ja P_3P_4 suuntainen (nämä suorat eivät leikkaa, koska muutoin kaikki neljä pistettä olisivat suorien määräämässä tasossa). On jälleen tasan yksi taso, joka on kahden leikkaamattoman suoran suuntainen ja yhtä etäällä molemmista. Pisteet voidaan kolmella tavalla jakaa pareiksi, joten näitä tasoja on tasan kolme. Yhteensä tehtävässä vaadittuja tasoja on seitsemän kappaletta.

226. Koska a, b ja c ovat erään kolmion sivut, pätee $a < b+c$, $b < c+a$ ja $c < a+b$. Näin ollen

$$\frac{a}{b+c} = \frac{2a}{2(b+c)} = \frac{2a}{(b+c)+(b+c)} < \frac{2a}{a+b+c}.$$

Samoin näytetään, että

$$\frac{b}{c+a} < \frac{2b}{a+b+c}, \quad \text{ja} \quad \frac{c}{a+b} < \frac{2c}{a+b+c}.$$

Siis

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} < \frac{2a+2b+2c}{a+b+c} = 2.$$

227. Koska mielivaltaisen luvun jakojäännös 9:llä jaettaessa on sama kuin sen numeroiden summan jakojäännös yhdeksällä jaettaessa, niin N:n jakojäännös on sama kuin lukujen 1, 2, ..., 1992 summan eli luvun

$$\frac{1992 \cdot 1993}{2} = 1\,985\,028$$

jakojäännös; eli 6. Mutta x^3:n jakojäännös eli x^3 modulo 9 riippuu siitä, mikä on x:n jakojäännös eli mitä on x modulo 9. Yksinkertainen lasku osoittaa, että (modulo 9) $x \equiv 0 \Rightarrow x^3 \equiv 0$, $x \equiv 1 \Rightarrow x^3 \equiv 1$, $x \equiv 2 \Rightarrow x^3 \equiv 8$, $x \equiv 3 \Rightarrow x^3 \equiv 0$, $x \equiv 4 \Rightarrow x^3 \equiv 1$, $x \equiv 5 \Rightarrow x^3 \equiv 8$, $x \equiv 6 \Rightarrow x^3 \equiv 0$, $x \equiv 7 \Rightarrow x^3 \equiv 1$ ja $x \equiv 8 \Rightarrow x^3 \equiv 8$. Koska x^3 ei koskaan ole 6 modulo 9, niin kaikilla kokonaisluvuilla pätee $N \neq x^3$.

228. Osoitetaan, että jos kahden janan AC pituudet ja suunnat on kiinnitetty ja jos janat ovat nelikulmion lävistäjät, niin nelikulmion pinta-ala on täysin määrätty. Janat AC ja BD voivat olla nelikulmion $ABCD$ lävistäjät vain, jos joko suora AC leikkaa janan BD tai suora BD leikkaa janan AC. Jos nimittäin AC ja BD ovat yhdensuuntaiset ja esim. vektorit $\overrightarrow{AC}$ ja $\overrightarrow{BD}$ ovat yhdensuuntaiset, niin janat AD ja BC leikkaavat toisensa. Samoin, jos suorat AC ja BD leikkaavat pisteessä O, joka ei ole kummallakaan janoista AC, BD, niin ja jos C on A:n ja O:n sekä B D:n ja O:n välissä, niin janat AB ja CD leikkaavat toisensa. Näissä tapauksissa $ABCD$ ei voi olla aito nelikulmio. Ei merkitse rajoitusta, jos oletetaan, että lävistäjä AC on kiinteä ja että suora BD leikkaa janan AC. Silloin BD sijaitsee A:n ja C:n kautta piirrettyjen BD:n suunnan määräämien yhdensuuntaisten suorien välissä, ja nelikulmion $ABCD$ ala koostuu kahdesta kolmiosta, joiden yhteisenä kantana on BD ja korkeusjanojen yhteenlaskettuna pituutena on suorien välinen etäisyys. Näin ollen $ABCD$:n ala on puolet sen suunnikkaan alasta, jonka määrittävät vektorit $\overrightarrow{AC}$ ja $\overrightarrow{BD}$.

229. Voidaan olettaa, että $BC > BA$. Oletetaan, että B:stä piirretty korkeusjana leikkaa AC:n pisteessä D, kulmanpuolittaja pisteessä E ja keskijana pisteessä F. Koska $BC > BA$, niin $\angle CAB > \angle BAC$. Koska kolmiot BCD ja ABD ovat suorakulmaisia, niin $\angle ABD < \angle DBC$. Tästä seuraa edelleen, että $\angle ABD < \dfrac{1}{2} \cdot \angle ABC$, ja se, että D on A:n ja E:n välissä. Toisaalta sen mukaan, mitä tiedetään siitä, miten kulmanpuolittaja jakaa vastaisen sivun, on

$$\frac{AE}{EC} = \frac{AB}{BC} < 1.$$

Tästä seuraa, että $AE < \dfrac{1}{2}AB = AF$, joten E on F:n ja D:n välissä.

230. Merkitään $\alpha = \angle BDA$, $\beta = \angle BEA$ ja $\gamma = \angle BCA$. Silloin $\alpha = 45°$, $\tan\beta = \dfrac{1}{2}$ ja $\tan\gamma = \dfrac{1}{3}$. Edelleen

$$\tan(\beta+\gamma) = \frac{\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3}}{1 - \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{3}} = 1,$$

joten $\beta + \gamma = 45°$; siis $\alpha + \beta + \gamma = 45° + 45° = 90°$.

231. Koska $b - a = c - b$, niin $b = \dfrac{1}{2}(a + c)$. Lasketaan kolmion ala S kahdella tavalla; toisaalta $S = \dfrac{1}{2}bc\sin\alpha$ ja sinilauseen nojalla $\sin\alpha = \dfrac{a}{2R}$, joten

$$S = \frac{abc}{4R}.$$

Toisaalta $S = rp = r\dfrac{a+b+c}{2}$. Mutta nyt $p = \dfrac{3}{2}b$. Siis

$$\frac{abc}{4R} = \frac{3}{2}br,$$

josta $ac = 6rR$.

232. Jos kaarien päätepisteet ovat A_i, $i = 1,\ 2,\ 3\,4$ ja keskipisteet B_i, $i = 1, 2, 3, 4$, ja jos $\alpha_i = \angle A_iOA_{i+1}$, niin kehäkulmalauseen nojalla $\angle B_1B_2B_4 = \dfrac{1}{4}(\alpha_1 + \alpha_4)$ ja $\angle B_2B_1B_3 = \dfrac{1}{4}(\alpha_2 + \alpha_3)$. Jos B_1B_3 ja B_2B_4 leikkaavat pisteessä A, niin $\angle B_1AB_2 = 180° - \frac{1}{4}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) = 180° - \frac{1}{4}360° = 90°$.

233. Jos A:n ja B:n kautta kulkeva ympyrä Γ sivuaa kulman toista kylkeä pisteessä C, niin jokaiselle muulle kyseisen kyljen pisteelle D joko AD tai BD leikkaa Γ:n pisteessä C'; $\angle ADB < \angle AC'B = \angle ACB$. Piste C löydetään esim. sen perusteella, että $OC^2 = OA \cdot OB$ (öpisteen potenssi ympyrän suhteenö). Konstruktiossa janat AO ja OB asetetaan suoralle vierekkäin janaksi $A'O'B'$, piirretään $A'B'$-halkaisijainen ympyrä ja O':n kautta $A'B'$:a vastaan kohtisuora. Se leikkaa piirretyn ympyrän pisteessä C' niin, että $OA' : OC' = OC' : OB'$ eli $OC'^2 = OA'OB'$.

234. Olkoon $|PE| = a$ ja $|PD| = b$. Piirretään janat $PF \| OD$ ja $PG \| OE$. Merkitään kolmioiden PEF, PGD ja PFG aloja kirjaimilla x, y ja z. Kolmion ODE ala on $S = x + y + 2z$. Koska

$$\frac{x}{z} = \frac{a}{b}, \quad \frac{y}{z} = \frac{b}{a},$$

niin

$$S = z\left(2 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) = 4z + z\frac{(a-b)^2}{ab}.$$

Selvästi S on pienin, kun $a = b$ eli $DP = PE$.

235. Tehtävän kaksi polynomia ovat

$$\frac{x^{n(m+1)} - 1}{x^n - 1} \quad \text{ja} \quad \frac{x^{m+1} - 1}{x - 1}$$

Jaollisuus toteutuu, jos

$$\frac{(x^{n(m+1)} - 1)(x - 1)}{(x^{m+1} - 1)(x^n - 1)} \tag{1}$$

on polynomi. Tarkastelu (kuten polynomitehtävät usein muutenkin) on yksinkertaisinta tehdä kompleksiluvuilla. Jos $p \in \mathbb{N}$, niin yhtälön $x^p = 1$ p eri kompleksilukujuurta ovat $x = e^{\frac{2\pi ik}{p}}$, $k = 0, 1, \ldots p - 1$, joten

$$x^p - 1 = \prod_{k=0}^{p-1}\left(x - e^{\frac{2\pi ik}{p}}\right).$$

Erityisesti polynomin $x^{n(m+1)} - 1$ tekijät ovat eri 1. asteen polynomeja. Jos lauseketta (1) voidaan supistaa niin, että nimittäjäksi tulee 1, niin polynomeilla $x^{m+1} - 1$ ja $x^n - 1$ ei saa olla muita yhteisiä tekijöitä kuin $x - 1$. Mutta tämä merkitsee, että

$$\frac{k}{m+1} \neq \frac{j}{n} \quad \text{eli} \quad \frac{m+1}{k} \neq \frac{n}{j}$$

kaikilla $k = 1, 2, \ldots, m$ ja $j = 1, 2, \ldots, n - 1$ eli että luvuilla $m + 1$ ja n ei ole yhteisiä tekijöitä. Tämä ehto on myöskin riittävä tekemään (1):stä polynomin, sillä $x^{n(m+1)} - 1 = (x^n)^{m+1} - 1 = \left(x^{(m+1)}\right)^n - 1$, ja $x^{n(m+1)} - 1$ on siis jaollinen sekä polynomilla $x^{m+1} - 1$ että polynomilla $x^n - 1$.

236. Jos O on mielivaltainen piste kolmion ABC sisä- tai ulkopuolella, niin

$$T(ABC) = T(OAB) + T(OBC) + T(OCA).$$

Siis

$$\begin{aligned} T(ABC) &= T(A'BC) + T(A'CA) + T(A'AB),\\ T(A'B'C') &= T(AB'C') + T(AC'A') + T(AA'B'). \end{aligned}$$

Koska $AA' \| CC'$, niin kolmioilla $A'C'A$ ja $AC'A'$ on sama kanta AA' ja sama korkeus, mutta vastakkainen kiertosuunta. Siis $T(A'CA) + T(AC'A') = 0$. Samalla tavoin $T(AA'B) + T(A'AB') = 0$. Siis

$$T(ABC) + T(A'B'C') = T(A'BC) + T(AB'C').$$

Symmetrian perusteella myös

$$\begin{aligned} T(ABC) + T(A'B'C') &= T(A'BC) + T(AB'C')\\ T(ABC) + T(A'B'C') &= T(ABC') + T(A'B'C). \end{aligned}$$

Väitös saadaan, kun kolme viimeksi saatua yhtälöä lasketaan puolittain yhteen.

237. Jos yhtälön $x^4 + x^3 - 1 = 0$ juuret ovat a, b, c ja d, niin yhtälön juurten ja kertoimien kaavojen (Vieten kaavojen) mukaan

$$\begin{cases} -1 = a + b + c + d,\\ 0 = ab + ac + ad + bc + bd + cd,\\ 0 = abc + bcd + cda + dab,\\ -1 = abcd. \end{cases}$$

Merkitään $p = a + b$, $q = ab$, $r = c + d$ ja $s = cd$. Tällöin p, q, r ja s toteuttavat yhtälöt

$$\begin{cases} p + r = 1,\\ q + s + pr = 0,\\ ps + qr = 0,\\ qs = -1. \end{cases}$$

Näistä ratkaistaan ensin

$$\begin{cases} r = -1 - p,\\ s = -\dfrac{1}{q}, \end{cases}$$

ja sitten yhtälöparista

$$\begin{cases} q - \dfrac{1}{q} - p - p^2 = 0\\ -\dfrac{p}{q} - q - pq = 0 \end{cases}$$

$$p = -\frac{q^2}{1+q^2}$$

ja

$$q^2 - 1 + \frac{q^3}{1+q^2} - \frac{q^5}{(1+q^2)^2} = 0.$$

Kun viimeisestä yhtälöstä poistetaan nimittäjät, jää q:n eli ab:n toteuttavaksi yhtälöksi väitöksen mukainen $q^6 + q^4 + q^3 - q^2 - 1 = 0$.

238. Jos O on origo ja $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ ja $\vec{d} = \overrightarrow{OD}$ ovat nelikulmion kärkien paikkavektorit, niin nelikulmion lävistäjien keskipisteiden M ja N paikkavektorit ovat

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{c}) \quad \text{ja} \quad \overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{d}).$$

Keskipisteet yhdistävä vektori on

$$\overrightarrow{NM} = \frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{c}-\vec{b}-\vec{d}).$$

Nelikulmion vastakkaiset sivut ovat pareittain yhtä pitkät jos ja vain jos

$$(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b}) = (\vec{c}-\vec{d})\cdot(\vec{c}-\vec{d}) \tag{1}$$

ja

$$(\vec{b}-\vec{c})\cdot(\vec{b}-\vec{c}) = (\vec{a}-\vec{d})\cdot(\vec{a}-\vec{d}). \tag{2}$$

Kun (1):stä ja (2):sta poistetaan sulkeet ja yhtälöt vähennetään puolittain toisistaan, saadaan

$$\vec{a}\cdot\vec{a} - \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{c} - \vec{c}\cdot\vec{c} + \vec{c}\cdot\vec{d} - \vec{a}\cdot\vec{d} = 0$$

eli

$$(\vec{a}-\vec{c})\cdot(\vec{a}+\vec{c}-\vec{b}-\vec{d}) = 0. \tag{3}$$

Siis $\overrightarrow{CA} \perp \overrightarrow{NM}$. Jos (1) ja (2) puolestaan lasketaan yhteen, saadaan samojen sievennysten jälkeen

$$(\vec{b}-\vec{d})\cdot(\vec{a}+\vec{c}-\vec{b}-\vec{d}) = 0. \tag{4}$$

Siis $\overrightarrow{DB} \perp \overrightarrow{NM}$. Jos taas (3) ja (4) ovat voimassa, saadaan vastaavasti yhteenlaskien ja vähentäen yhtälöt (1) ja (2). Lävistäjien ja niiden keskipisteiden yhdistyssuoran kohtisuoruus ja nelikulmion vastakkaisten sivujen pareittainen yhtäsuuruus ovat siis keskenään yhtäpitäviä ominaisuuksia.

239. Tehtävän ratkaisu perustuu seuraavaan yksinkertaiseen havaintoon: jos vasenta puolta tarkastellaan minkä hyvänsä yhden sen viidestä muuttujasta funktiona, niin vasemman puolen kuvaaja on alaspäin kupera: jos yhtä luvuista $a, \ldots, e$ merkitään x:llä ja muut ovat vakioita, niin vasen puoli on

$$f(x) = (x + A)\left(\frac{1}{x} + B\right) = 1 + \frac{A}{x} + Bx + AB.$$

Nyt

$$f'(x) = -\frac{A}{x^2} + B, \qquad f''(x) = \frac{2A}{x^3} > 0.$$

f saa suurimman arvonsa joko kun $x = p$ tai kun $x = q$. Tästä seuraa, että silloin, kun epäyhtälön vasen puoli saa suurimman arvonsa, jokainen luvuista $a, \ldots, e$ on joko p tai q. Voimme olettaa, että tässä maksimitilanteessa n muuttujista saa arvon p ja loput $5 - n$ arvon q. Maksimiarvo on siis

$$F = (np + (5-n)q)\left(\frac{n}{p} + \frac{5-n}{q}\right) = n^2 + (5-n)^2 + n(5-n)\left(\frac{p}{q} + \frac{q}{p}\right)$$

$$= n^2 + (5-n)^2 + 2n(5-n) + n(5-n)\left(\sqrt{\frac{p}{q}} - \sqrt{\frac{q}{p}}\right)^2 = 25 + n(5-n)\left(\sqrt{\frac{p}{q}} - \sqrt{\frac{q}{p}}\right)^2.$$

Koska $n(5-n)$ on suurin, kun $n = 2$ tai $n = 3$, saadaan lopulta

$$F \le 25 + 6\left(\sqrt{\frac{p}{q}} - \sqrt{\frac{q}{p}}\right)^2.$$

240. Olkoon ympyröiden yhteinen piste O ja olkoot ympyröiden kolme keskipistettä P, Q ja R. Silloin O on kolmion PQR ympäri piirretyn ympyrän keskipiste; tämän ympyrän säde on r. Nimetaaän pisteet niin, että A on P- ja R-keskisten ympyröiden yhteinen piste ja B on R- ja Q-keskisten ympyröiden toinen leikkauspiste. PR on janan AO keskinormaali, josta seuraa $\angle ARP)\angle PRO$. Samoin nähdään, että $\angle ORQ = \angle QRB$. Mutta tästä ja kehäkulmalauseesa seuraa $\angle ARB = 2 \cdot \angle PRQ = \angle POQ$. Kolmioissa ABR ja PQO on lisäksi $AR = RB = OP = OQ$. Siis kolmiot ovat yhteneviä, joten $AB = PQ$. Samoin $BC = PR$ ja $CA = QR$. Mutta tämä merkitsee, että kolmiot PQR ja ABC ovat yhtenevät. Siis kolmikon ABC ympäri piirretyn ympyrän keskipiste ja säde ovat samat kuin kolmion PQR.

241. Jos $n = 1$, tapoja on 1, jos $n = 2$, mikä tahansa sijoittelu kelpaa, joten tapoja on $4! = 24$. Oleteaan, että $n \ge 3$. Koska aritmeettinen jono on aidosti kasvava tai aidosti vähenevä, luvuista pienin eli 1 on sijoitettava johonkin ruudukon kulmaruuduista ja suurin eli n^2 samoin. Luku 2 on välttämättä sijoitettava jompaan kumpaan ykkösen viereiseen ruutuun. Kun 1 ja 2 on sijoitettu, lukujen $3, \ldots, n$ paikka määräytyy yksikäsitteisesti. Oletetaan, että 1 on vasemmassa yläkulmassa ja 2 1:n oikealla puolella, jolloin n on oikeassa yläkulmassa. $n + 1$ ei voi olla minkään vaakarivin keskellä, eikä $n + 1$:n ja ylimmän vaakarivin välissä voi olla tyhjiä ruutuja. Jos $n + 1$ olisi n:n alapuolella, oikeassa alakulmassa olisi $2n$, $n+1$:n vasemmalla puolella ainakin $2n+1$ ja 1:n alapuolella ainakin n^2+1. Siis $n+1$ on ykkösen alapuolella ja täten vasemmassa alakulmassa $1+(n\equiv 1)n = n^2+1 \equiv n$. Siis n^2 on oikeassa alakulmassa. Koska kaikissa kulmissa olevat luvut on määrätty, myös kaikissa reunariveissä olevat luvut on määrätty, ja myös kaikki niiden välisissä ruuduissa olevat luvut. – Erilaisia tapoja sijoittaa ensin 1 kulmaruutuun ja sitten 2 sen viereen on $4\times 2 = 8$.

242. Oletuksesta $0 < a+b+c \le 1$ seuraa $(a+b+c)^2 \le 1$ eli $a^2+(2ab+b^2)+(c^2+2bc+2ca) \le 1$. Koska $a \ge b \ge c$, niin $2ab+b^2 \ge 3b^2$ ja $2bc+2ca+c^2 \ge 5c^2$. Väite seuraa.

243. Koska APB, AO_1B toisaalta ja AQB, AO_2B toisaalta ovat samaa kaarta vastaavat kehäŒ ja keskuskulmat, on $\angle AO_1B+\angle AO_2B = 2(\angle APB+\angle AQB) = 180°$. Tästä seuraa, että $\angle O_1AO_2+\angle O_1BO_2 = 180°$. Mutta kolmiot O_1AO_2 ja O_1BO_2 ovat yhteneviä, joten $\angle O_1AO_2 = \angle O_1BO_2 = 90°$.

244. Jos x ja y ovat ehdon toteuttavia lukuja, niin

$$x+y+2\sqrt{xy} = 1992. \tag{1}$$

Olkoon t x:n ja y:n suurin yhteinen tekijä. Silloin $x = ta$, $y = tb$, ja a:n ja b:n ovat yhteistekijättömiä. Kaavan (1) nojalla $2t\sqrt{ab}$ on kokonaisluku ja $4t^2ab$ kokonaisluvun neliö. Koska a:lla ja b:llä ei ole yhteisiä tekijöitä, on oltava $a = c^2$, $b = d^2$. Sijoitetaan (1):een, jolloin saadaan $tc^2+td^2+2tcd = t(c+d)^2 = 1992 = 4\cdot 2\cdot 3\cdot 83$. Koska $c \ge 1$, $d \ge 1$, on oltava $c+d = 2$ ja $t = 2\cdot 3\cdot 83 = 498$. Siis $a = 1$, $b = 1$, $x = y = 498$. Toisaalta, jos $x = y = 498$, niin $\sqrt{x}+\sqrt{y} = \sqrt{1992}$.

245. Oletamme, että $x = \dfrac{p}{q}$ on yhtälön ratkaisu, ja oletetaan, että p:llä ja q:lla ei ole yhteisiä tekijöitä. Silloin

$$ap^2+bpq+cq^2 = 0. \tag{2}$$

Jos p on parillinen, q on pariton. Silloin cq^2 ja (2):n vasen puoli ovat parittomia. Jos p on pariton ja q on parillinen, niin ap^2 ja (2):n vasen puoli ovat parittomia. Jos p ja q ovat molemmat parittomia, (2):n vasemman puolen kaikki kolme yhteenlaskettavaa ja itse vasen puoli ovat parittomia. Missään tapauksessa vasen puoli ei voi olla nolla.

246. Osoitetaan, että $n = 999$. Todistaaksemme, että $n \ge 999$, tarkastelemme joukkoa $A = \{997, 998, \ldots, 1994\}$, jossa on $1994-996 = 998$ alkiota. Joukon kahden eri luvun summa on aina lukujen $997+998 = 1994+1$ ja $1993+1994 = 2\cdot 1994-1$ välissä, eikä siis voi olla jaollinen 1994:llä. Samoin lukujen erotus on aina itseisarvoltaan pienempi kuin 1994. Todistetaan sitten, että $n \le 999$. Jos nimittäin A on joukko, jossa on 999 alkiota, ja jos minkään kahden A:n alkion erotus ei ole jaollinen 1994:llä, niin A:n lukujen a_k jakojäännökset r_k modulo 1994 ovat joukon $\{0, 1, 2, \ldots, 1993\}$ 999 eri lukua. Jos luvuista r_k p kappaletta on pienempiä kuin 997, niin ainakin $998-p$ luvuista r_k on suurempia kuin 997. Tällöin ainakin joillekin k, l tulee pätemään $r_l = 1994-r_k$. Mutta silloin a_k+a_l on jaollinen 1994:llä.

247. Voidaan olettaa, että pisteet eivät satu päällekkäin (sellaisen tapahtuman todennäköisyys on nolla). Se, onko kolmioilla yhteisiä pisteitä vai ei, riippuu vain pisteiden järjestyksestä, ei niiden etäisyyksistä. Kuusi pistettä voidaan asettaa ympyrälle 5! eri järjestykseen (6:n alkion permutaatioita on 6!, mutta ympyrälle asetettuina 6 kiertovaihtelulla toisistaan eroavaa permutaatiota tuottavat aina saman konfiguraation. Yhteisalkiottomia kolmioita tuottavat ne permutaatiot, joissa A, B, C toisaalta ja D, E, F toisaalta ovat vierekkäin. Koska kummatkin kolmen pisteen joukot voidaan järjestää toisistaan riippumatta 3! eri tavalla, suotuisien järjestysten osuus kaikista eli kysytty todennäköisyys on $\dfrac{(3!)^2}{5!} = \dfrac{3}{10}$.

248. Jos yhtälön juuret ovat $x_1, x_2, \ldots, x_5$, niin tunnettujen kaavojen mukaan

$$\sum_{i=1}^{5} x_i = -a, \quad \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{5} x_i x_j = b.$$

Koska $2a^2 \equiv 5b < 0$, niin

$$2\left(\sum x_i\right)^2 \equiv 5\sum x_i x_j < 0$$

eli

$$2\sum x_i^2 + 4\sum x_i x_j - 5\sum x_i x_j = \frac{1}{2}\sum (x_i - x_j)^2 < 0.$$

Luvut x_i eivät voi kaikki olla reaalisia.

249. Oletetaan, että kokoelman joukot ovat $F_1, F_2, \ldots, F_n$. Jokainen F_k voidaan esittää muodossa $F_k = [a_k, b_k] \cup [c_k, d_k]$, missä $a_k \le b_k \le c_k \le d_k$. Olkoon $a = \max a_k$ ja $d = \min d_k$. Silloin $a = a_i$ jollain i ja $d = d_j$ jollain j. Väitämme, että jokainen F_k sisältää ainakin toisen pisteistä a ja b (jolloin ainakin toinen tulee kuulumaan ainakin puoleen joukoista F_k). Vastaoletus: eräällä k on $a_i \notin F_k$ ja $d_j \notin F_k$. Koska $a_k \le a_i$, on oltava $b_k < a_i$, eli $F_i \cap [a_k, b_k] = \emptyset$. Koska $d_k \ge d_j$, on oltava $c_k > d_j$, eli $F_j \cap [c_k, d_k] = \emptyset$. Mutta tämä merkitsee, että kolmella joukolla F_i, F_j ja F_k ei ole yhteistä pistettä, toisin kuin oli oletettu. Vastaoletus on väärä.

250. Olkoon AH kysytty korkeusjana. AH:n kautta asetettu CD:tä vastaan kohtisuora taso leikatkoon CD:n pisteessä X. Koska CD on kohtisuorassa tasoa AHX vastaan, $AX \perp CD$ ja $HX \perp CD$. Jos tetraedri "avataan" kolmion BCD tasoon, ja sivutahko ACD kääntyy kolmioksi $A'CD$, niin piste H tulee olemaan DC:tä vastaan kohtisuoralla suoralla $A'X$. Jos sivutahko ABC vastaavasti kääntyy tason BCD kolmioksi $A''BC$, niin H on samoin BC:tä vastaan kohtisuoralla suoralla $A''Y$. Pisteen H konstruointi onnistuu näin ollen harpilla ja viivoittimella, sillä kolmioiden BCD, $A'CD$ ja $A''BC$ sivut tunnetaan. Kun H tunnetaan, AH voidaan konstruoida sen tiedon perusteella, että AH on suorakulmaisen kolmion ABH kateetti; hypotenuusa AB ja toinen kateetti BH tunnetaan.

251. Jaetaan tarkasteltavat välin I murtoluvut kahteen luokkaan. Ensimmäiseen kuuluvat ne r murtolukua $\frac{u_i}{v_i}$, joille $v_i \le \frac{n}{2}$ ja toiseen ne s murtolukua $\frac{x_i}{y_i}$, joille $\frac{n}{2} < y_i \le n$. Valitaan jokaista nimittäjää v_i kohden kokonaisluku c_i, jolle $\frac{n}{2} \le c_i v_i \le n$. Merkitään $y_{s+i} = c_i v_i$ ja $x_{s+i} = c_i v_i$. Nyt kaikki luvut $y_1, \ldots, y_{s+r}$ ovat eri lukuja, sillä jos olisi $y_i = y_j$, olisi $\left|\frac{x_i}{y_i} \equiv \frac{x_j}{y_j}\right| \ge \frac{1}{y_i} \ge \frac{1}{n}$, joka olisi ristiriidassa sen kanssa, että molemmat luvut ovat avoimella välillä, jonka pituus on $\frac{1}{n}$. Koska näin ollen ensimmäiseen luokkaan voivat kuulua vain sellaisia murtolukuja, joiden nimittäjän monikerta ei ole toiseen luokkaan kuuluvan luvun nimittäjä, lukuja voi olla yhteensä enintään $n \equiv \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \le \frac{n+1}{2}$ kappaletta.

252. Voimme olettaa, että ainakin yksi nelikulmion kulmista, sanokaamme $\angle DAB$, on $\ge 90°$. Lisäksi voidaan olettaa, että $AD \ge AB$. Kosinilauseesta saadaan tehtyjen oletusten perusteella jokseenkin suoraan

$$g^2 \ge BD^2 = AD^2 + AB^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos(\angle DAB) \ge 2AB^2 \ge 2h^2,$$

eli väite.

253. Osoitetaan, että $M_n = M_{n-1}$ kaikilla n, jotka eivät ole muotoa p^k, missä p on alkuluku. Jos $n = p^k$ jollakin alkuluvulla p ja jollakin positiivisella kokonaisluvulla k, niin p^{k-1} on M_{n-1}:n tekijä, koska $p^{k-1} < n$. Toisaalta p^k ei ole M_{n-1}:n tekijä. Siis $M_n = pM_{n-1}$. Jos n ei ole kokonaisluvun potenssi, niin jokainen n:n alkulukupotenssimuotoinen tekijä on lukujen 2, 3, $\ldots$, $n-1$ joukossa, mistä seuraa $M_{n-1} = M_n$.

254. Kolmiot ABC ja XYZ ovat yhdenmuotoiset. Erityisesti $\angle ACB = \angle YXZ = \angle CPZ$. Kolmio ZPC ontasakylkinen. Koska Z on BC:n keskipiste, P on Z-keskisellä BC-halkaisijaisella ympyrällä, joten $\angle BPC = 90°$.

255. Tarkastetaan yhtälöitä arvoilla $x = y = \frac{z}{2}$. Saadaan

$$1 + zf\left(\frac{1}{z}\right) = 1 + f(z) = 2f\left(\frac{z}{2}\right) = 2 \cdot \frac{z}{2} f\left(\frac{2}{z}\right) = z\left(2f\left(\frac{1}{z}\right) - 1\right).$$

Tästa seuraa

$$zf\left(F\left(\right)\frac{1}{z}\right) = z + 1$$

ja

$$f(z) = 1 + z.$$

On vielä tarkistettava, että $f(x) = 1 + x$ todella toteuttaa tehtävän ehdot (a) ja (b); näin tapahtuu.

256. Koska pisteitä P_i on äärellinen määrä, kolmioita, joiden kärjet ovat pisteiden P_i joukossa, on myös äärellinen määrä. Jollakin kolmioista, sanokaamme kolmiolla $P_iP_jP_k$, on maksimaalinen pinta-ala, joka on ≤ 1. Maksimaalisuuden vuoksi yksikään P-piste ei voi olla eri puolella P_k:n kautta kulkevaa ja P_jP_k:n suuntaista suoraa kuin P_i ja P_j. Vastaavalla tavalla päätellään, että kaikki P-pisteet ovat kolmiossa, joka on $P_iP_jP_k$:n kanssa yhdenmuotoinen ja jonka sivujen keskipisteet ovat P_i, P_j ja P_k. Tämän kolmion ala on 4 kertaa kolmion $P_iP_jP_k$ ala eli ≤ 4.

257. Voidaan olettaa, että suora ℓ on x-akseli ja ympyrä C on ympyrä $x^2 + (y-1)^2 = 1$. Jos $B = (-b,\, 0)$ ja $C = (c,\, 0)$, niin

$$\tan\left(\frac{1}{2}\angle ABP\right) = \frac{1}{b}, \quad \tan\left(\frac{1}{2}\angle ACP\right) = \frac{1}{c},$$

joista saadaan kaksinkertaisen kulman tangentin kaavan mukaan

$$\tan(\angle ABP) = \frac{2b}{b^2-1}, \quad \tan(\angle ACP) = \frac{2c}{c^2-1}.$$

Ympyrän tangenttien yhtälöt ovat näin ollen

$$y = \frac{2b}{b^2-1}(x+b), \quad y = -\frac{2c}{c^2-1}(x-c).$$

Suorien leikkauspisteen y- koordinaatti toteuttaa yhtälön

$$\frac{1-c^2}{2c}y + c = \frac{b^2-1}{2b}y - b.$$

Jos $bc = k$, niin vm. yhtälö saa ratkaisun

$$y = \frac{k}{k-1}.$$

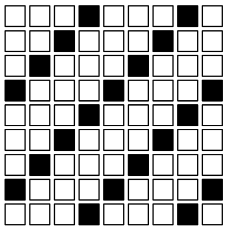
Pisteiden B ja C liikkuessa tehtävässä kuvatulla tavalla P liikkuu pitkin suoran ℓ suuntaista suoraa. (Jos $k = 1$, tangentit ovat yhdensuuntaiset).

258. Olkoot nollakohdat $t_1,\ t_2,\ \ldots t_n$. Tunnetun tuloksen mukaan $t_1t_2\ldots t_n = |a_0| = |f(0)|$. Toisaalta $f(x) = (x-t_1)(x-t_2)\cdot\ldots\cdot(x-t_n)$. Siis $|f(0)| = f(1) = (1-t_1)(1-t_2)\cdot\ldots\cdot(1-t_n)$. Sovelletaan aritmeettisen ja geometrisen keskiarvon välistä epäyhtälöä:

$$\begin{aligned}(t_1t_2\cdot\ldots\cdot_n)^{2/n} &= (t_1(1-t_1)t_2(1-t_2)\cdot\cdots\cdot t_n(1-t)_n)^{2/n}\\ &\leq \left(\frac{t_1+(1-t_1)+t_2+(1-t_2)+\cdots+t_n+(1-t_n)}{2n}\right)^2 = \frac{1}{2^2}.\end{aligned}$$

Väite seuraa, kun yhtälö korotetaan puolittain ptenssiin $\dfrac{n}{2}$.

259. Ruudukon ylimmällä neljällä rivillä ja alimmalla neljällä rivillä on yhteensä 18 erillistä 1×4-suorakaidetta ja keskimmäisellä vaakarivillä on kaksi erillistä 4×1-suorakaidetta. Jos yksikin näistä on vapaa mustista ruuduista, se on tehtävän mukainen värittämätön suorakaide. Jos siis $n \geq 19$, niin välttämättä jää yksi mustista ruuduista vapaa suorakaide. Esimerkiksi väritys



osoittaa, että on mahdollista värittää 20 ruutua mustaksi niin, että valkoisia 1×4- tai 4×1-suorakaiteita ei jää. Siis maksimaalinen n on 19.

260. Olkoot G' ja H' sellaiset sivujen AB ja BC pisteet, että $GG' \perp AB$ ja $HH' \perp BC$. Silloin $GG' = HH' = AB$, $GG' \perp HH'$ ja $\angle EGG' = \angle FHH'$ (koska kulmien molemmat vastinkyljet ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan). Näin ollen suorakulmaiset kolmiot EGG' ja FHH' ovat yhteneviä, ja $EG = FH$.

261. Olkoon $m = AA'$ teräväkulmaisen kolmion ABC mediaani. Jos $h = AA_1$ on saman kolmion korkeusjana ja jos $A'A_1 = x$ ja $b \leq c$ (niin kuin voidaan olettaa; muussa tapauksessa muutetaan kolmion kärkien nimiä niin, että B ja C vaihtuvat), niin suorakulmaisista kolmioista ABA_1 ja ACA_1 saadaan

$$h^2 = c^2 - \left(\frac{a}{2} + x\right)^2 = b^2 - \left(\frac{a}{2} - x\right)^2.$$

Kun sulkeet poistetaan ja sievennetään, saadaan

$$x = \frac{c^2 - b^2}{2a}.$$

Siis suorakulmaisesta kolmiosta $AA'A_1$ saadaan edelleen Pythagoraan mukaan

$$\begin{aligned} m^2 = h^2 + x^2 = c^2 - \left(\frac{a}{2} + \frac{c^2 - b^2}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c^2 - b^2}{2a}\right)^2 &= c^2 - \frac{a^2}{4} - 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{c^2 - b^2}{2a} \\ &= \frac{b^2}{2} + \frac{c^2}{2} - \frac{a^2}{4} \end{aligned}$$

ja

$$m = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}.$$

Jos kolmio on tylppäkulmainen, niin lauseke $\frac{a}{2} - x$ on korvattava lausekkeella $x - \frac{a}{2}$; koska ko. lauseke korotetaan laskun aikana neliöön, lopputulos ei muutu.

262. Edellisen tehtävän ratkaisussa on jo

$$h^2 = c^2 - \left(\frac{a}{2} + \frac{c^2 - b^2}{2a}\right)^2.$$

Kehitellään tätä kuitenkin vähän eteenpäin:

$$h^2 = \left(c - \frac{a}{2} - \frac{c^2 - b^2}{2a}\right)\left(c + \frac{a}{2} + \frac{c^2 - b^2}{2a}\right) = \frac{2ac - a^2 - c^2 + b^2}{2a} \cdot \frac{2ac + a^2 + c^2 - b^2}{2a}$$
$$= \frac{1}{4a^2}(b^2 - (c-a)^2)((c+a)^2 - b^2) = \frac{1}{4a^2}(b - c + a)(b + c - a)(c + a - b)(c + a + b).$$

Jos otetaan käyttöön vakiintunut merkintä

$$p = \frac{a + b + c}{2},$$

niin

$$h^2 = \frac{4}{a^2}(p(p-a)(p-b)(p-c))$$

ja siis

$$h = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

(Tästä saadaankin heti Heronin kaava: kolmion ala on

$$T = \frac{1}{2}ah = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.)$$

263. Olkoot m_a, m_b ja m_c kolmion ABC keskijanat. Tehtävän 261 perusteella

$$\begin{cases} 4m_a^2 = 2(b^2 + c^2) - a^2 \\ 4m_b^2 = 2(c^2 + a^2) - b^2 \\ 4m_c^2 = 2(a^2 + b^2) - c^2 \end{cases}$$

Siis

$$4(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2).$$

Tästä ratkaistaan

$$3a^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2) - 4m_a^2 = \frac{8}{3}(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) - 4m_a^2$$

ja

$$a^2 = \frac{8}{9}(m_b^2 + m_c^2) - \frac{4}{9}m_a^2.$$

264. Olkoon ABC teräväkulmainen kolmio, AA_1, BB_1 ja CC_1 sen korkeusjanat ja H ABC:n ortokeskipiste. Koska kulmat BA_1H ja BC_1H ovat suoria, BH halkaisijana piirretty ympyrä kulkee pisteiden A_1 ja C_1 kautta. Tämän ympyrän kehäkulmina kulmat C_1BH ja C_1A_1H ovat yhtä suuret. Samoin osoitetaan, että $\angle B_1A_1H = \angle B_1CH$. Mutta myös $\angle C_1BH = \angle B_1CH$, koska näiden kulmien vastinkyljet ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Siis $\angle C_1A_1H = \angle B_1A_1H$. Samoin perustein H on myös kulmien $B_1C_1A_1$ ja $C_1B_1A_1$ puolittajilla. Se on siis kolmion $A_1B_1C_1$ kulmanpuolittajien leikkauspiste eli kyseisen kolmion sisään piirretyn ympyrän keskipiste.

265. Jos $x = AA_0$ on kolmion ABC kulmanpuolittaja ja $\alpha = \dfrac{1}{2}\angle BAC$, niin $BA_0 = \dfrac{ca}{b+c}$ ja $A_0C = \dfrac{ba}{b+c}$ (koska puolittaja jakaa sivun BC suhteessa $b : c$. Kosinilause sovellettuna kolmioihin ABA_0 ja AA_0C antaa

$$\frac{c^2a^2}{(b+c)^2} = c^2 + x^2 - 2cx\cos\alpha$$
$$\frac{b^2c^2}{(b+c)^2} = b^2 + x^2 - 2bx\cos\alpha.$$

Eliminoidaan näistä kosinitermit; saadaan

$$\frac{bc^2a^2 - b^2a^2c}{(b+c)^2} = bc^2 - b^2c + (b-c)x^2.$$

Jos $b \neq c$, saadaan

$$x^2 = \frac{1}{b-c}\left(\frac{bca^2(c-b)}{(b+c)^2} + bc(b-c)\right) = bc\left(1 - \frac{a^2}{(b+c)^2}\right)$$
$$= \frac{bc}{(b+c)^2}(b+c-a)(b+c+a) = \frac{4bc}{(b+c)^2}\cdot p(p-a).$$

Siis

$$x = 2\frac{\sqrt{bc}}{b+c}\sqrt{p(p-a)}.$$

Muut kulmanpuolittajanpituudet saadaan tästä a:n, b:n ja c:n kiertovaihtelulla.

266. Olkoot $AB = a$ ja $CD = b$ puolisuunnikkaan $ABCD$ kannat eli sen yhdensuuntaiset sivut ja E ja F lävistäjien AC ja BD keskipisteet sekä M lävistäjien leikkauspiste. Oletetaan, että $a > b$ (os $a = b$, puolisuunnikas on oikea suunnikas, joka lävistäjät puolittavat toisensa. Olkoon vielä G sivun AB keskipiste ja H sellainen sivun AB piste, että $AHCD$ on suunnikas. Silloin kolmioista ABM, ABC ja ABD nähdään, että $EF \| AB$, $EG \| BC$ ja $GF \| DA \| CH$. Kolmiot EFG ja BHC ovat yhdenmuotoiset suhteessa $1 : 2$. Koska $BH = a - b$, $EF = \dfrac{1}{2}(a-b)$.

267. Olkoon ortokeskus H ja kolmion ympäri piirretyn ympyrän keskipiste O. Olkoot lisäksi B_1 ja A_1 sivujen AC ja BC keskipisteet. Silloin $A_1B_1 \| AB$, $OB_1 \| BH(\perp AC)$ ja $OA_1 \| AH$. Tästä seuraa kolmioiden AHB ja A_1OB_1 yhdenmuotoisuus; koska $AB = 2 \cdot A_1B_1$ on myös $BH = 2 \cdot OB_1$, eli väitös pitää paikkansa.

268. Kosinilauseen perusteella nähdään heti, että jos $a \le b \le c$ ovat kolmion sivut, niin kolmio on teräväkulmainen jos ja vain jos $c^2 < b^2 + c^2$. Oletetaan nyt, että $a \le b \le c \le d \le e$ ja että sivuista a, b ja c, b, c ja d sekä c, d ja e muodostetut kolmiot ovat kaikki suora- tai tylppäkulmaisia. Silloin

$$c^2 \ge a^2 + b^2, \quad d^2 \ge b^2 + c^2, \text{ ja } e^2 \ge c^2 + d^2.$$

Kun edelliset kolme epäyhtälöä lasketaan puolittain yhteen, saadaan

$$c^2 + d^2 + e^2 \ge a^2 + 2b^2 + 2c^2 + d^2$$

ja $e^2 \ge a^2 + 2b^2 + c^2 \ge a^2 + b^2 + ab + ab = (a+b)^2$. Mutta tämä on ristiriidassa sen kanssa, että a, b ja e ovat kolmion sivut (olisi nimittäin oltava $e < a + b$).

269. Kerrotaan ensimmäinen yhtälö x_2:lla, toinen x_3:lla, $(n-1)$:s x_n:llä ja n:s x_1:llä; kun kaikki yhtälöt lasketaan puolittain yhteen, supistuvat kaikki x_kx_{k+1}-tyyppiset termit, ja jäljelle jää vain $-(x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_n^2 + x_1^2) = 0$. Tämän yhtälön ainoa ratkaisu on $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

270. (Kysymys on mielekäs, koska harmoninen sarja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ hajaantuu.) Lukua 10^k pienemmistä, siis enintään kŒnumeroisista ei-negatiivisista kokonaisluvuista on tasan 9^k sellaista, joiden kymmenjärjestelmäesityksessä ei esiinny numeroa 9 – nämä ovat numeromerkeistä 0, 1, …, 8 muodostetut k:n merkin jonot (joissa tietysti jonon mahdolliset alkunollat jätetään tavan mukaan kirjoittamatta). Tästä seuraa, että välillä $[10^k,\ 10^{k+1} - 1]$ on $9^{k+1} - 9^k$ "yhdeksikötöntä" kokonaislukua; näistä jokaisen käänteisluku on $\le 10^{-k}$. Tehtävän sarjan nimittäjän arvoon $n = 10^{k+1}$ asti laskettujen termien summa on siten pienempi kuin

$$\begin{aligned}&(9-1)\cdot 10^0 + (9^2 - 9)\cdot 10^{-1} + \ldots + (9^{k+1} - 9^k)\cdot 10^{-k}\\ &= 8 \cdot \left(1 + \frac{9}{10} + \ldots + \frac{9^k}{10^k}\right) < \frac{8}{1 - \dfrac{9}{10}} = 80.\end{aligned}$$

Koska sarjan osasummat ovat rajoitettuja ja sarjan termit ovat positiivisia, sarja suppenee.

271. Todistus perustuu yhtälöön

$$\frac{(x+a)!}{(x-a)!} = \prod_{i=1}^{a}(x^2 + x - i^2 + i), \tag{1}$$

joka todistetaan oikeaksi induktiolla: Kun $a = 1$, on

$$\frac{(x+a)!}{(x-a)!} = \frac{(x+1)!}{(x-1)!} = (x+1)x = x^2 + x.$$

Oletetaan, että (1) pätee. Silloin

$$\frac{(x+a+1)!}{(x-a-1)!} = (x+a+1)(x-a)\prod_{i=1}^{a}(x^2+x-i^2+i) = \prod_{i=1}^{a+1}(x^2+x-i^2+i),$$

koska $(x+a+1)(x-a) = x^2 \equiv a^2 + x - a = x^2 + x - (a+1)^2 + a + 1$. Tulossa (1) on joka tekijällä arvio

$$x^2 + x \ge x^2 + x - i^2 + i \ge i^2 + i - i^2 + i = 2i,$$

ja väite seuraa heti.

272. Kertoimien summa on polynomin arvo, kun $x = 1$. Tässä tapauksessa siis $1^{743} \cdot 1^{744} = 1$.

273. Olkoon $p(x) = (1+x^2-x^3)^{1000}$ ja $q(x) = (1-x^2+x^3)^{1000}$. Kun p ja q kirjoitetaan x:n potenssien summaksi, niin $p(x)$:ssä ja $p(-x)$:ssä samoin kuin $q(x)$:ssä ja $q(-x)$:ssä x:n parillisten potenssien kertoimet ovat samat. Mutta $p(-x) = (1+x^2+x^3)^{1000}$ ja $q(-x) = (1-x^2-x^3)^{1000}$. x^{40}:n kerroin syntyy sekä $p(-x)$:ssä että $q(-x)$:ssä potenssiin 1000 korotettavan trinomin kertoimista samoin yhteen- ja kertolaskuoperaatioin; $p(-x)$:n tapauksessa lähtöluvut ovat kaikki positiivisia, $q(-x)$:n tapauksessa lähtöluvuissa on myös negatiivisia. Tästä seuraa, että x^{40}:n kerroin on $p(-x)$:ssä suurempi kuin $q(-x)$:ssä. Siis se on myös suurempi $p(x)$:ssä kuin $q(x)$:ssä.

274. a) Jakoyhtälön mukaan $x + x^3 + x^9 + x^{27} + x^{81} + x^{243} = q(x)(x+1) + r(x)$, missä r on astetta 0 ja siis vakio. Kun yhtälöön sijoitetaan $x = -1$, saadaan $r = -6$.

b) $x + x^3 + x^9 + x^{27} + x^{81} + x^{243} = q(x)(x^2-1) + ax + b$. Kun sijoitetaan $x = 1$ ja $x = -1$, saadaan $a + b = 6$ ja $-a + b = -6$, eli $a = 6$, $b = 0$. Jakojäännös on $6x$.

275. Jakoyhtälön nojalla $p(x) = (x-1)q_1(x)+2 = (x-2)q_2(x)+1$. Siis $p(1) = 2$ ja $p(2) = 1$. Jakoyhtälön nojalla edelleen $p(x) = (x-1)(x-2)q_3(x) + ax + b$. Siis $a + b = p(1) = 2$ ja $2a + b = p(2) = 1$, eli $a = -1$, $b = 3$. Kysytty jakojäännös on $-x + 3$.

276. Koska $p(0) = 0 \cdot p(-1) = 0$, $p(x) = xp_1(x)$ ja $xp(x-1) = x(x-1)p_1(x) = (x-13)p(x)$. Täten $p(1) = 0$, joten $p(x) = x(x-1)p_2(x)$. Edelleen $xp(x-1) = x(x-1)(x-2)p_2(x) = (x-13)p(x)$, joten $p(2) = 0$, ja $p(x) = x(x-1)(x-2)p_3(x)$. Näin jatkaen saadaan $p(x) = x(x-1)(x-2)\cdot\ldots\cdot(x-12)p_{13}(x)$ ja $x(x-1)\cdot\ldots\cdot(x-13)p_{13}(x-1) = (x-13)p(x) = (x-13)\cdot x(x-1)\cdot\ldots\cdot(x-12)p_{13}(x)$. Siis $p_{13}(x) = p_{13}(x-1)$ kaikilla x. Tämä on mahdollista vain, jos polynomi p_{13} on vakio, $p_{13}(x) = c$. (Polynomiyhtälöllä on enintään polynomin asteen osoittama määrä ratkaisuja.) Siis $p(x) = cx(x-1)(x-2)\cdot\ldots\cdot(x-12)$.

277. Oletamme, että $x^p y^q + 1 = f(x)g(y)$ ja $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$. Silloin $1 = 0^p \cdot y^q + 1 = f(0)g(y) = a_0 g(y)$. Siis $g(y) = a_0^{-1}$ = vakio. Samoin osoitetaan, että $f(x)$ = vakio. Ristiriita!

278. Koska $p(x) - x$ on jatkuva funktio, se ei voi muuttaa merkkiään. Ei merkitse rajoitusta, kun oletetaan, että $p(x) - x > 0$ kaikilla x. Mutta silloin $p(p(x)) - p(x) > 0$ kaikilla x. Siis $p(p(x)) > p(x) > x$ kaikilla x. [Oletus, jonka mukaan $p(x)$ on nimenomaan toisen asteen polynomi, ei tule käyttöön ollenkaan.]

279. Olkoon $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$. Voidaan olettaa, että $p(0) = a_0$ on alkuluku. Koska $p(ka_0) - p(0) = p(ka_0) - a_0 = ka_0(a_n(ka_0)^{n-1} + \ldots + a_1)$, luvut $p(ka_0)$ ovat jaollisia luvulla a_0. Yhtälöt $p(ka_0) = a_0$ ja $p(ka_0) = -a_0$ voivat toteutua enintään $2n$:llä k:n arvolla. Jollakin k on siis $p(ka_0) \neq \pm a_0$. Koska $p(ka_0)$ kuitenkin on luvun a_0 monikerta, $p(ka_0)$ ei ole alkuluku kaikilla k.

280. *Ratkaisu 1.* Oletetaan, että $x^n + x^{-n} = \cos n\alpha$, kun $n = 1, 2, \ldots, k$. Silloin $4\cos k\alpha \cos\alpha = (x^k + x^{-k})(x + x^{-1}) = x^{k+1} + x^{-(k+1)} + x^{k-1} + x^{-(k-1)} = x^{k+1} + x^{-(k+1)} + 2\cos(k-1)\alpha$. Mutta koska $\cos((k \pm 1)\alpha) = \cos(k\alpha)\cos\alpha \mp \sin(k\alpha)\sin\alpha$, niin $4\cos(k\alpha)\cos\alpha = 2\cos(k+1)\alpha + 2\cos(k-1)\alpha$. Tästä seuraa, että on oltava $x^{k+1} + x^{-(k+1)} = 2\cos(k+1)\alpha$. Induktioperiaatteen nojalla tehtävän väite on tosi.

Ratkaisu 2. Olkoon $x = e^{i\pm\alpha} = \cos\alpha \pm i\sin\alpha$. Silloin $x^{-1} = e^{i\mp\alpha} = \cos\alpha \mp i\sin\alpha$ ja $x + x^{-1} = 2\cos\alpha$. Edelleen $x^n + x^{-n} = e^{\pm in\alpha} + e^{\mp in\alpha} = \cos(n\alpha) \pm i\sin(n\alpha) + \cos(n\alpha) \mp i\sin(n\alpha) = 2\cos(n\alpha)$.

281. Merkitään $\sqrt{a+x} = y$. Ratkaistaan yhtälöpari

$$\begin{cases} \sqrt{a-y} = x, \\ \sqrt{a+x} = y. \end{cases}$$

Jos nämä yhtälöt toteutuvat, niin $a + x = y^2$ ja $a - y = x^2$; edelleen $x + y = y^2 - x^2$. Koska $x \geq 0$ ja $y \geq 0$, $x + y = 0$ vain, kun $x = y = a = 0$. Oletetaan, että $a > 0$. Silloin $y - x = 1$ ja $a - 1 - x = x^2$ eli

$$x = -\frac{1}{2} + \sqrt{a - \frac{3}{4}}.$$

Koska $x \geq 0$, ratkaisu löytyy vain, kun $a \geq 1$. – Sijoittamalla alkuperäiseen yhtälöön voidaan, muutaman välivaiheen jälkeen, varmistua siitä, että saatu ratkaisuehdokas todella toteuttaa yhtälön.

282. Kun yhtälön vasenta puolta sievennetään, nähdään, että yhtälö on muotoa

$$\frac{ax+b}{cx+d} = x,$$

eli se on toisen asteen yhtälö, ja sillä on enintään kaksi ratkaisua. Jos $1+\dfrac{1}{x}=x$, ketjumurtolukua voi lyhentää alapäästä, ja yhtälö redusoituu identtiseksi. Koska yhtälöllä $1+\dfrac{1}{x}=x$ on kaksi ratkaisua

$$x=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{5}}{2},$$

nämä ovat myös alkuperäisen yhtälön juuret.

283. Merkitään juurilausekkeita sisimmästä alkaen $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Siis $y_1^2=3x=x+2x$, $y_2^2=x+2y_1, \ldots, y_n^2=x+2y_{n-1}$. Varsinainen yhtälö on $y_n=x$. Osoitetaan, että $x=y_1$. Jos olisi $x>y_1$, olisi $y_1^2>y_2^2$ eli $y_1>y_2$, ja edelleen $y_2>y_3>\ldots>y_n$, mikä olisi ristiriidassa yhtälön $y_n=x$ kanssa. samoin nähdään, ettei voi olla $x<y_1$. Siis $x=y_1=\sqrt{3x}$, $x^2=3x$, $x=0$ tai $x=3$. Molemmat toteuttavat alkuperäisen yhtälön.

284. Koska $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3=0$, kun $a=-b$ ja kun $a=-c$, niin $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3=f(b,c)(a+b)(a+c)$. Kun tähän sijoitetaan $a=0$, saadaan $bcf(b,c)=(b+c)^3-b^3-c^3=3bc(b+c)$. Siis $f(b,c)=3(b+c)$, ja $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3=3(a+b)(b+c)(c+a)$. Mutta myös $(a+b+c)^{333}-a^{333}-b^{333}-c^{333}=0$, kun $a=-b$, joten $(a+b+c)^{333}-a^{333}-b^{333}-c^{333}$ on jaollinen $a+b$:llä. Samoin nähdään, että se on jaollinen $b+c$:llä ja $c+a$:lla. [Polynomien jaollisuudesta on kyse, joten tekijästä 3 ei tarvitse välittää.]

285. *Ratkaisu 1.*

$$\begin{aligned} x^{10}+x^5+1 &= \frac{(x^5)^3-1}{x^5-1}=\frac{(x^3)^5-1}{x^5-1}=\frac{(x^3-1)(x^{12}+x^9+x^6+x^3+1)}{(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)}\\ &=(x^2+x+1)\frac{x^{12}+x^9+x^6+x^3+1}{x^4+x^3+x^2+x+1}. \end{aligned}$$

Viimeinen osamäärä voidaan jakaa jakokulmassa; osamäärä on $x^8-x^7+x^5-x^4+x^3-x+1$. Siis $x^{10}+x^5+1=(x^2+x+1)(x^8-x^7+x^5-x^4+x^3-x+1)$.

Ratkaisu 2. Merkitään $y=x^5$. Yhtälön $y^2+y+1=0$ juuret ovat yhtälön $y^3=1$ juuret lukuun ottamatta juurta $y=1$. Siis $y=e^{\pm\frac{2\pi}{3}}=e^{\pm\frac{2\pi}{3}+2n\pi}$. Vastaavasti yhtälöiden $x^5=e^{\pm\frac{2\pi}{3}+2n\pi}$ juuret ovat $x=e^{\pm\frac{2\pi}{15}+n\frac{2\pi}{5}}$. Kun polynomin ensimmäisen asteen tekijät liitetään pareittain yhteen niin, että kompleksisia liittolukuja vastaavat termit kerrotaan keskenään, saadaan tekijöihinjako, jossa tekijät ovat reaalikertoimisia toisen asteen polynomeja:

$$x^{10}+x^5+1=\prod_{n=0}^{4}(x-e^{i2\pi(\frac{1}{15}+\frac{n}{5})})(x-e^{-i2\pi(\frac{1}{15}+\frac{n}{5})})=\prod_{n=0}^{4}\left(x^2-2x\cos\left(2\pi\left(\frac{1}{15}+\frac{n}{5}\right)\right)+1\right).$$

286. Merkitään $x-\lfloor x\rfloor=\{x\}$. Ratkaistavana on yhtälö $x^3-x=3-\{x\}$. Koska $0\le\{x\}<1$, on oltava $2\le x^3-x=x(x^2-1)<3$. Jos $x\ge 2$, niin $x^3-x\ge 6$. Jos $x\le -1$, niin $x(x^2-1)\le 0$. Jos $|x|\le 1$, niin $|x(x^2-1)|<1$. On oltava $1<x<2$ eli $\lfloor x\rfloor=1$. Yhtälö on $x^3=4$, ja $x=\sqrt[3]{4}$.

287. Ratkaistaan yhtälöryhmä reaalilukujen joukossa. Jos (x, y) on ratkaisu ja $|x| = 1$, niin $y = 0$ ja edelleen $x = 1$, ja jos $|y| = 1$, niin $x = 0$ ja $y = 1$. Jos $0 < |x| < 1$, niin $0 < |y| < 1$. Tässä tapauksessa x ja y eivät voi olla erimerkkisiä, koska $x^3+y^3 < |x^3+y^3| < \max\{|x^3|, |y^3|\} < 1$. x ja y eivät myöskään voi molemmat olla negatiivisia. Jos taas x ja y ovat molemmat positiivisia ja $x^3 + y^3 = 1$, niin $x^4 + y^4 = x \cdot x^3 + y \cdot y^3 < x^3 + y^3 = 1$. Ainoat yhtälöryhmän ratkaisut ovat $x = 1$, $y = 0$ ja $x = 0$, $y = 1$.

288. Korvataan tehtävän vuosiluku 1985 mielivaltaisella luvulla n. Valitaan mielivaltaiset (eri) luvut $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ja lasketaan $s = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2$ ja $t = a_1^3 + a_2^3 + \ldots + a_n^3$. Jos nyt $x_i = s^m t^k a_i$, niin

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = s^{2m} t^{2k} \sum_{i=1}^{n} a_i^2 = s^{2m+1} t^{2k}.$$

Vastaavasti

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^3 = s^{3m} t^{3k+1}.$$

$s^{2m+1}t^{2k}$ on kolmas potenssi ja $s^{3m}t^{3k+1}$ neliö, jos $2m + 1$ ja $2k$ ovat jaollisia kolmella ja $3m$ ja $3k + 1$ jaollisia kahdella. Esimerkiksi valinta $m = 4$ ja $k = 3$ (tai yleisemmin $m \equiv 4 \bmod 6$ ja $k \equiv 3 \bmod 6$) takaa tämän. Kysyttyjä kokonaislukuratkaisuja on siis äärettömän paljon.

289. Neliöksi täydennettynä yhtälö on

$$\left(x^2 - 10^{10} - \frac{1}{2}\right)^2 = x + \frac{5}{4}.$$

Vasen puoli on aina ei-negatiivinen. Välillä $\left[-\frac{5}{4}, 0\right]$ vasen puoli on noin 10^{20} ja oikea puoli alle 2, joten yhtälöllä ei voi olla negatiivisia ratkaisuja. Välillä $\left[0, \sqrt{10^{10} + \frac{1}{2}}\right]$ yhtälöllä on tasan yksi juuri (vasen puoli vähenee noin 10^{10}:stä nollaan, ja oikea puoli kasvaa. Välillä $\left[\sqrt{10^{10} + \frac{1}{2}}, \infty\right]$ vasen puoli on kasvava ja kupera alaspäin, joten sen kuvaaja leikkaa suoran $y = x + \frac{5}{4}$ tasan kerran. Yhtälöllä on kaikkiaan tasan kaksi reaalijuurta. Etsitään likiarvo. Koska x^2 on suurempi kuin x ja 10^{10} suurempi kuin $\frac{1}{2}$, yhtälön juuret ovat likimain samat kuin neljännen asteen yhtälön $(x^2 - 10^{10})^2 = 0$ juuri $x = 10^5$. Tarkempi likiarvo saadaan, kun oikean puolen x korvataan arvolla 10^5 (ja pienet murtoluvut edelleen unohdetaan. Tullaan yhtälön $(x^2 - 10^{10})^2 = 10^5$ juuriin $x = \sqrt{10^{10} \pm \sqrt{10^5}} \approx 10^5\sqrt{1 \pm 10^{-10} \cdot 10^2 \cdot \sqrt{10}} \approx 10^5(1 \pm \frac{1}{2}10^{-8}\sqrt{10}) = 10^5 \pm \frac{1}{2}10^{-3}\sqrt{10} \approx 10^5 \pm 0{,}0016$. Helppo lasku näyttää, että $f(x) = x^4 \equiv (2 \cdot 10^{10} + 1)x^2 \equiv x + 10^{20} + 10^{10} \equiv 1$ saa negatiivisen arvon, kun $x = 10^5 \pm 0,00155$ ja positiivisen arvon, kun $x = 10^5 \pm 0,00165$. Tästä seuraa, että kysytyt luvut ovat 100000,0016 ja 99999,9984.

290. Oletamme, että AD on se tehtävän janoista, joka voi olla pitempi kuin 1. Jos muut viisi janaa ovat vakiopituiset, AD on pisin, kun kaikki neljä pistettä ovat tasossa ja A ja D ovat nelikulmion $ABDC$ vastakkaiset kärjet. Pisteet A ja B ovat lisäksi sellaisen ympyräkaksikulmion sisällä, joka muodostuu B- ja C-keskisten yksikköympyröiden leikkauksena. Tämä kuvio on keskeissymmetrinen janan BC keskipisteen O suhteen. Tämän kuvion pisin jänne on O:n kautta kulkeva ympyröiden yhteinen jänne: jänne, joka ei kulje O:n kautta voidaan kiertää asentoon, jossa se on (mahdollisesti osa) jommankumman ympyrän jännettä ja siis lyhempi kuin yhteinen jänne. Jos A ja D ovat yhteisen jänteen päätepisteet, niin AB, AC, BC ja BD ovat mahdollisimman suuret. Tehtävä palautuu $BC + AD$:n maksimointiin. Merkitään $\theta = \angle ABC$. Koska $BC \leq 1$, $\theta \geq 60°$. Lisäksi $AD + BC = 2(\sin\theta + \cos\theta) = 2\sqrt{2}\sin(\theta + 45°)$. Koska $\sin(\theta + 45°)$ vähenee, kun $\theta > 60°$, maksimi saadaan, kun $\theta = 60°$. $AD + BC$:n maksimi on $2(\sin 60° + \cos 60°) = 1 + \sqrt{3}$; kysytyn kuuden janan pituuksien summan maksimi on $5 + \sqrt{3}$.

291. Pari $\{A, B\}$ on *sekoitettu* C:n suhteen, jos C tuntee tasan toisen A:sta ja B:stä. Jos C tuntee k henkilöä, niin seurueessa on $k(n-1-k)$ C:n suhteen sekoitettua paria. Aritmeettisen ja geometrisen keskiarvon epäyhtälön nojalla kunkin seurueen jäsenen suhteen sekoitettuja pareja on enintään $\frac{1}{4}(n-1)^2$ kappaletta. Yhdistelmiä ”henkilö ja tämän henkilön suhteen sekoitettu pari” on siten $\frac{1}{4}n(n-1)^2 = \frac{1}{2}(n-1)\binom{n}{2}$. Seurueessa on $\binom{n}{2}$ paria; ainakin yksi pari on sekoitettu enintään $\left\lfloor \frac{1}{2}(n-1) \right\rfloor$ henkilön suhteen. Mutta tällaisen parin suhteen löytyy $n - 2 - \left\lfloor \frac{1}{2}(n-1) \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1$ henkilöä, jotka joko tuntevat molemmat parin jäsenet tai eivät tunne kumpaakaan.

292. Tässäkin on epäolennainen vuosilukukytkentä. Osoitetaan yleisesti, että jos $a_q = p$, niin

$$s_{p,q} = a_1 + a_2 + \ldots + a_q + b_1 + b_2 + \ldots b_p = pq + p.$$

(Erityisesti $s_{19,85} = 1700$.) Jos $a_1 = a_2 = \ldots a_q$, niin $b_1 = b_2 = \ldots = b_p = 1$, ja $s_{p,q} = qp + p$. Ellei näin ole, niin olkoon t suurin indeksi, jolla $a_t < p$; olkoon $a_t = u$. Jos a_t korvataan $a_t + 1$:llä eli $u + 1$:llä, niin b_{u+1} korvautuu $b_{u+1} - 1$:llä, ja muut b_i:t säilyvät muuttumattomina. a_t:n kasvattaminen ei siis muuta $s_{p,q}$:ta. Mutta tällä tavoin voidaan a_i-lukuja kasvattaa, kunnes ne ovat kaikki $= p$, summan muuttumatta. Koska lopputilassa $s_{p,q} = qp + p$, se on kaikilla jonoilla $qp + p$.

293. Jos $f(x)$ on kokonaislukukertoiminen polynomi ja $f(m) = 0$ jollain kokonaisluvulla m, niin $f(x) = (x-m)g(x)$, missä g on kokonaislukukertoiminen polynomi. JOs nimittäin $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ ja $g(x) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k x^k$, niin $b_{n-1} = a_n$, $mb_{n-1} + b_{n-2} = a_{n-1}$, jne., joten b_{n-1} jne. ovat kokonaislukuja. Olkoot sitten $a_1, a_2, \ldots, a_m$ yhtälön $P(x) = 3$ kokonaislukujuuret. Silloin $P(x) = 3 + (x - a_1)(x - a_2) \cdot \ldots \cdot (x - a_m)R(x)$, missä R on kokonaislukukertoiminen polynomi. Olkoon $P(b) = -3$ jollain kokonaisluvulla b. Silloin $(b - a_1)(b - a_2) \cdot \ldots \cdot (b - a_m)h(b) = P(b) - 3 = P(b) + 3 - 6 = -6$ Luvuista $b - a_j$

enintään 2 voi olla eri suuria kuin 1 tai -1. Koska luvut ovat eri suuria, $m \le 4$. Yhtälöllä $P(x) = -3$ on enintään 1995 ratkaisua. Näin ollen yhtälöllä $P(x)^2 - 9 = 0$ on enintään $1995 + 4 = 1999$ kokonaislukuratkaisua.

294. Olkoon $AE = x$, $BE = y$, $CE = z$ ja $DE = t$. Jos $\angle AEB = \alpha$, niin $2F_1 = xy\sin\alpha$, $2F_2 = tz\sin\alpha$ ja $2F = (xy + tz + xt + zy)\sin\alpha = (x+z)(y+t)\sin\alpha$. Schwarzin epäyhtälön nojalla $\sqrt{x}\sqrt{y} + \sqrt{z}\sqrt{t} \le \sqrt{(x+z)(y+t)}$ eli $\sqrt{F_1} + \sqrt{F_2} \le \sqrt{F}$. Schwarzin epäyhtälön yhtäsuuruusehto on $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{z}} = \dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{t}}$. Tämä ehto kertoo, että kolmiot AEB ja CED ovat yhdenmuotoiset. Erityisesti $\angle EAB = \angle ECD$, eli $AB \| CD$. Nelikulmion on oltava puolisuunnikas. Sama päättely on käännettävissä, joten yhtäsuuruus vallitsee aina ja vain, kun nelikulmio on puolisuunnikas.

295. Yhtälö on sama kuin $x^{y^z-1} \cdot y^{z^x-1} \cdot z^{x^y-1} = 1995^{1995}$. Oletetaan ensin, että luvuista x, y ja z pienin on ≥ 2 Koska $1995 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19$, ainakin yksi luvuista on jaollinen 19:llä. Olkoon se x. Koska y ja z ovat parittomia, ne ovat ≥ 3. Siis $y^{z^x-1} \ge 3^{3^{19}-1}$. Koska $3^7 = 27 \cdot 81 = 2187$, niin $1995^{1995} \le 3^{7\cdot 1995} = 3^{13967}$. Mutta $3^{19} > 3^{3\cdot 6} > 10^6$, joten $3^{3^{19}-1}$ on (paljon) suurempi kuin 1995^{1995}. Voidaan siis olettaa, että pienin luvuista x, y, z on 1; olkoon $z = 1$. Yhtälö palautuu yhtälöksi $x^{y-1} = 1995^{1995}$. Jos $x = 3^p \cdot 5^q \cdot 7^r \cdot 19^s$, niin yhtälö $x^{y-1} = 1995^{1995}$ toteutuu, kun $p = q = r = s$ ja $p(y-1) = 1995$. Ratkaisuja ovat kolmikot 1995, 1996, 1; 1995^3, 666, 1; 1995^5, 400, 1; 1995^7, 286, 1; 1995^{15}, 134, 1; 1995^{19}, 106, 1; 1995^{21}, 96, 1; 1995^{35}, 58, 1; 1995^57, 36, 1; 1995^{95}, 22, 1; 1995^{105}, 20, 1; 1995^{133}, 16, 1; 1995^{285}, 8, 1; 1995^{399}, 6, 1; 1995^{665} 4, 1; 1995^{1995}, 2, 1 ja niistä kiertovaihtelulla saatavat kolmikot.

296. Jokaisella k $p(k)$ on sama $(n-1)!$ eri permutaatiossa p. Näin ollen voidaan laskea

$$\begin{aligned}\sum_{p\in S_n} F(p) &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{p\in S_n} |k - p(k)| = \sum_{k=1}^{n}(n-1)!\sum_{j=1}^{n}|k-j| \\ &= (n-1)!(1\cdot(2n-2) + 2\cdot(2n-4) + \ldots + (n-1)\cdot 2) \\ &= (n-1)!((1+2+\ldots+(n-1))2n - 2(1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2)) \\ &= (n-1)!\left(\frac{(n-1)n}{2}2n - 2\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\right) = n!\frac{n^2-1}{3}.\end{aligned}$$

Siis $M_n = \dfrac{n^2-1}{3}$.

297. Schwarzin epäyhtälön perusteella

$$x + y + z \le \sqrt{3}\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

Aritmeettisen ja geometrisen keskiarvon epäyhtälön nojalla

$$x^2 + y^2 + z^2 \ge 3(x^2y^2z^2)^{1/3}, \quad xy + yz + zx \ge 3(x^2y^2z^2)^{1/3}.$$

Näin ollen

$$\begin{aligned}\frac{xyz(x+y+z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{(x^2+y^2+z^2)(xy+yz+zx)} &\le \frac{xyz(1+\sqrt{3})\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{(x^2+y^2+z^2)\cdot 3\cdot (x^2y^2z^2)^{1/3}}\\ &= \frac{1+\sqrt{3}}{3}\frac{(xyz)^{1/3}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \le \frac{1+\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} = \frac{3+\sqrt{3}}{9}.\end{aligned}$$

298. Olkoon $ABCD$ yksikköneliö ja O sen keskipiste sekä kolmio XYZ yksikköneliön sisällä niin, että O ei ole kolmion XYZ piste. Koska kolmion ulkopuolisen pisteen kautta voidaan aina piirtää suora, joka ei leikkaa kolmiota, jokin O:n kautta kulkeva suora ℓ jakaa neliön kahdeksi nelikulmioksi, joista toisen, esimerkiksi nelikulmion $ABPQ$ sisällä XYZ on. Pisteen O:n kautta kulkevaa suoraa ℓ vastaan kohtisuora suora ℓ' jakaa edelleen nelikulmion $ABPQ$ kahdeksi nelikulmioksi. Laatikkoperiaatteen nojalla kolmion XYZ kärjistä kaksi, esim. X ja Y sijaitsee näistä toisessa, esim. nelikulmiossa $RBPO$. Jos $PO = a$, niin nelikulmion $RBPO$ ympäri piirretyn ympyrän halkaisija $PR = \sqrt{2}a$. Koska

$$\frac{1}{2} \le a \le \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$XY \ge 1$ vain, jos $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$, jolloin $B = P$ ja ja $R = A$ ja X:n ja Y:n on yhdyttävä kärkiin A ja B. Jotta $XZ \ge 1$ ja $YZ \ge 1$, on Z:n oltava myös nelikulmion kärjessä, ja siten O kolmion piste.

299. Olkoot (x_1, y_1) ja (x_2, y_2) rationaalikoordinaattisia pisteitä ja $(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2 = 1$. Jos d_i on x_i:n ja y_i:n pienin yhteinen nimittäjä, niin $x_i = \dfrac{a_i}{d_i}$, $y_i = \dfrac{b_i}{d_i}$, missä a_i ja b_i ovat kokonaislukuja. Olkoon edelleen d murtolukujen x_2-x_1 ja y_2-y_1 pienin yhteinen nimittäjä. Siis $x_2 - x_1 = \dfrac{x}{d}$ ja $y_2 - y_1 = \dfrac{y}{d}$, missä x ja y ovat kokonaislukuja. Osoitetaan, että d ja $x + y$ ovat parittomia. Koska $x^2 + y^2 = d^2$, tiedetään Pythagoraan lukukolmikoiden yleisten ominaisuuksien nojalla, että $x = m^2 - n^2$, $y = 2mn$ ja $d = m^2 + n^2$ joillakin luonnollisilla luvuilla m ja n. Nyt y on parillinen ja x ja d ovat yhtä aikaa parillisia tai parittomia. Ne eivät voi olla parillisia, koska silloin sekä $\dfrac{x}{d}$:tä että $\dfrac{y}{d}$:tä voitaisiin supistaa, vastoin d:stä tehtyä oletusta. x ja d ovat siis molemmat parittomia samoin kuin $x+y$:kin. Osoitetaan sitten, että jos d_1 on pariton, niin d_2 on pariton. Koska

$$\begin{aligned}\frac{a_2}{d_2} &= x_1 + (x_2 - x_1) = \frac{a_1}{d_1} + \frac{x}{d} = \frac{a_1 d + x d_1}{dd_1},\\ \frac{b_2}{d_2} &= y_1 + (y_2 - y_1) = \frac{b_1}{d_1} + \frac{y}{d} = \frac{b_1 d + y d_1}{dd_1},\end{aligned}$$

täytyy d_2:n olla a_2dd_1:n ja b_2dd_1:n tekijä. Koska a_2:lla, b_2:lla ja d_2:lla ei ole yhteisiä tekijöitä, d_2 on dd_1:n tekijä. Koska d on pariton, myös d_2 on pariton.

Osoitetaan, että jos d_1 on pariton, niin a_1+b_1:n ja a_2+b_2:n parillisuudet ovat vastakkaisia. Koska

$$\frac{a_2+b_2}{d_2}-\frac{a_1+b_1}{d_1}=(x_2+y_2)-(x_1+y_1)=\frac{x+y}{2},$$

niin

$$d(d_1(a_2+b_2)-d_2(a_1+b_2))=d_1d_2(x+y).$$

Koska oikea puoli onpariton, on a_2+b_2:n ja a_1+b_1:n parillisuuden oltava vastakkaisia. Jos nyt k pistettä $\left(\frac{a_i}{d_i},\frac{b_i}{d_i}\right)$ ovat kukin ykkösen päässä edellisestä, niin a_1+b_1 ja a_k+b_k ovat samaa parillisuutta vain, jos k on parillinen.

300. Koska OC on ympyrän Y_2 halkaisija, niin kulma CDO on suora. Koska lisäksi $OC=OD$, niin kolmiot OCD ja OED ovat yhteneviä kolmioita (”ssk”). Siis $DE=DC$.

301. Nelikulmiossa $TQXP$ ovat kulmat TQX ja XPT suoria (näiden kulmien vieruskulmat ovatympyröiden halkaisijaa vastaavia kehäkulmia ja siis suoria). Suorat AP ja BQ ovat molemmat kohtisuorassa tangenttia PQ vastaan, ja siis yhdensuuntaiset. Siis $\angle PAR=\angle QBT$ ja kehäkulmalauseen mukaan edelleen $\angle PTR=\angle TSQ$, $\angle PRT=\angle QTS$. Koska $\angle QTS+\angle TSQ=90°$, on myös $\angle PTR+\angle QTS=90°=\angle PTQ$. Näin ollen nelikulmiossa $TQXP$ on kolme suoraa kulmaa, ja neljännenkin, eli kulman PXQ on oltava suora.

302. Olkoot ympyröiden keskipisteet O_1 ja O_2 ja leikatkoon suora O_1O_2 ympyrän C_2 pisteissä A ja E. Koska O_1B ja O_2C ovat molemmat kohtisuorassa suoraa BC vastaan, ne ovat yhdensuuntaiset. Siis $\angle BO_1A=CO_2E$. Toisaalta tasakylkiset kolmiot AO_1B ja AO_2D ovat yhdenmuotoiset, joten $\angle AO_2D=\angle BO_1A=\angle CO_2E$. Tämä onnistuu vain, jos C, O_2 ja D ovat samalla suoralla eli jos CD on Y_2:n halkaisija.

303. Kolmiosta ABQ nähdään, että $\angle ABQ=180°-(2x+3x)=180°-5x$. Kolmiosta BCP nähdään tämän jälkeen, että $\angle BCP=180°-(x+180°-5x)=6x$. Koska $ABCD$ on ympyrän sisään piirretty nelikulmio, $\angle DAB+\angle BCD=180°$ eli $3x+6x=180°$. Siis $x=\frac{1}{9}\cdot 180°=20°$.

304. Sijoitetaan origo ympyrän keskipisteeseen ja valitaan akselien sunniksi AT:n ja BT:n suunnat niin, että pisteen T koordinaatit ovat (r,r). Pisteen R koordinaatit ovat $(r-6,r-3)$. Koska R on ympyrän piste, $(r-6)^2+(r-3)^2=r^2$; tämä sievenee muotoon $r^2-18r+45=0$; ratkaisut ovat $r=15$ ja $r=3$.

305. Koska T on molemmilla ympyröillä ja ympyröiden keskipisteiden kautta kulkevalla suoralla, ympyröiden on sivuttava toisiaan pisteessä T. Suorakulmaisesta kolmiosta APC saadaan $AC^2=AP^2-CP^2=36-4=32$. Yhdenmuotoisista kolmioista PCA ja DBA saadaan edelleen $BD=AB\cdot\frac{CP}{AC}=8\cdot\frac{2}{\sqrt{32}}=2\sqrt{2}$.

306. Leikatkoon suora AP ympyrän myös pisteessä E. Silloin $\angle ACE = 90°$ ja $\angle ECB = \angle CAD$ (kulmien vastinkyljet ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan). Toisaalta $\angle ECB = \angle EAB$. Siis $\angle BAE = \angle CAD$. Koska kulma EAD saadaan kulmasta BAC, kun jälkimmäisen molemmilta sivuilta poistetaan yhtä suuret kulmat, on molemmilla sama kulmanpuolittaja.

307. Olkoon $\angle DAB = \alpha$ ja olkoon PR:n ja QS:n leikkauspiste U. Koska $ABCD$ on jännenelikulmio, niin $\angle BCD = 180° - \alpha$. Koska AP ja AS ovat sisemmän ympyrän tangentteja, $AP = AS$. Samoin perustein $CQ = CR$. Koska kolmiot APS ja CRQ ovat tasakylkisiä, on $\angle APS = \angle ASP = 90° - \dfrac{\alpha}{2}$ ja $\angle CQR = \angle CRQ = \dfrac{\alpha}{2}$. Tangentti- ja kehäkulmalauseiden nojalla $\angle PQS = \angle APS = 90° - \dfrac{\alpha}{2}$ ja $\angle QPR = \dfrac{\alpha}{2}$. Mutta tämä merkitsee, että kolmio PUQ on suorakulmainen, eli $PR \perp QS$.

308. Olkoon O kolmion ABC ympäri piirretyn ympyrän keskipiste. Oletetaan, että A on janalla EF. Nelikulmio $OBDC$ jakautuu kahdeksi yhteneväksi suorakulmaiseksi kolmioksi ODC ja ODB. Kehä- ja keskuskulmalauseen nojalla $\angle CRD = \dfrac{1}{2} \cdot \angle COB = \angle A$. Siis $CD = OC \cdot \tan(\angle COR) = R \tan A$, ja kolmion ODC ala $\dfrac{1}{2}R^2 \tan A$. Nelikulmion $OBDC$ ala on siten $R^2 \tan A$. Samalla tavalla nähdään, että nelikulmioiden $OCEA$ ja $OAFB$ alat ovat $R^2 \tan B$ ja $R^2 \tan C$; tehtävän väitteeseen päästään laskemalla nelikulmioiden alat yhteen.

309. Summista pienin, toiseksi pienin, suurin ja toiseksi suurin ovat välttämättä $a + b = 183$, $a + c = 186$, $d + e = 200$ ja $c + e = 196$. Kaksi ensimmäistä näistä yhtälöistä kertovat, että $c = b + 3$ ja kaksi viimeistä, että $c = d - 4$. Siis $d = b + 7$, joten $a + d = a + b + 7 = 190$. Toistaiseksi mainitsemattomista summista pienin on $b + c$. Sen on oltava 187. Siis $2b + 3 = 187$, joten $b = 92$. Jo kirjoitetuista yhtälöistä saadaan nyt helposti $a = 91$, $c = 95$, $d = 99$ ja $a = 101$.

310. $(2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 4(n^2 + n) + 1 = 4q + 1$, missä $q = n(n + 1)$.

311. Jos $n^2 = (k + 2)^2 - k^2$, niin $n^2 = 4k + 4 = 4(k + 1)$. On oltava $n = 2m$, missä $m^2 = k + 1$. Jos toisaalta n on parillinen luku, $n = 2m$, niin valitsemalla $k = m^2 - 1$ saadaan haluttu esitys. (Esim. $n = 14 = 2 \cdot 7$; $n^2 = 196 = 2500 - 2304 = 50^2 - 48^2$.)

312. Jotta luku olisi jaollinen 30:llä, sen on oltava jaollinen kahdella, kolmella ja viidellä. $k = mn(m^4 - n^4) = mn(m^2 - n^2)(m^2 + n^2) = mn(m + n)(m - n)(m^2 + n^2)$. Jos m ja n ovat molemmat parittomia, $m - n$ on parillinen. k on siis kaikissa tapauksissa jaollinen 2:lla. Jos m ja n eivät kumpikaan ole jaollisia 3:lla, niin joko molemmilla on sama jakojäännös kolmella jakoa yritettäessä, jolloin $m - n$ on jaollinen 3:lla tai sitten toisen jakojäännös on 1 ja toisen 2, jolloin $m + n$ on jaollinen kolmella. Ellei kumpikaan luvuista m ja n ole jaollinen 5:llä, on $m = 5p + a$ ja $n = 5q + b$, missä a ja b ovat välillä $[1, 4]$ olevia kokonaislukuja. Jos $a \pm b$ on 0 tai 5, niin $m \pm n$ on jaollinen viidellä. Koska $m^2 + n^2 = 25(p^2 + q^2) +$

$50(ap+bq)+a^2+b^2$, luku m^2+n^2 antaa viidellä jaettaessa saman jakojäännöksen kuin a^2+b^2. Tapaukset, joissa $a \pm b \neq 0$, 1 ovat $\{a, b\} = \{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 4\}$ ja $\{3, 4\}$. Näissä tapauksissa a^2+b^2 on 5, 10, 20 tai 25, joten m^2+n^2 on jaollinen 5:llä.

313. Peräkkäisten parittomien alkulukujen p ja q summa on parillinen: $p+q=2k$. Jos summalla olisi vain kaksi alkutekijää, olisi k alkuluku ja lukujen p ja q keskiarvona näiden välissä, jolloin p ja q eivät olisi peräkkäisiä alkulukuja.

314. Koska $m^4+4n^4 = (m^2+2n^2)^2 - 4m^2n^2 = (m^2+2n^2-2mn)(m^2+2n^2+2mn) = ((m-n)^2+n^2)((m+n)^2+n^2)$, m^4+2n^4 voi olla alkuluku vain, jos $(m-n)^2+n^2 = 1$, joka taas voi toteutua vain, jos $m=n$ ja $n=1$. Jos $m=n=1$, niin $m^4+4n^4=5$; $m=n=1$ on siis ainoa ratkaisu.

315. Koska $\dfrac{x^5}{5}+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{7x}{15} = \dfrac{1}{15}(x(3x^4+5x^2+7))$, väite tulee todisteuksi, jos näytetään, että $x(3x^4+5x^2+7)$ on jaollinen sekä 3:lla että 5:llä. Jos x ei ole jaollinen 3:lla, niin $x=3y+a$, missä $a=1$ tai $a=2$, ja $x^2=9a^2+6ay+a^2$, ja $a^2=1$ tai $a^2=4$. Silloin $5x^2+7$ on kolmella jaollinen luku + 12 tai 27, ja siis jaollinen 3:lla. Vastaavasti, jos $x=5z+b$, $b=1$, 2, 3 tai 4, niin $x^4 =$ 5:llä jaollinen luku + 1, 16, 81 tai 256 ja $3x^4+7$ on 0:aan tai 5:een päättyvä luku ja siis 5:llä jaollinen.

316. Koska $(3a+b)^2 = 9a^2+6ab+b^2$, niin nähdään, että jaettaessa luvun toista potenssia kolmella jakojäännökseksi saadaan joko 0 ($b=0$ eli luku kolmella jaollinen) tai 1 ($b=1$ tai $b=2$; $2^2=3+1$). Oletetaan, että $x^2+y^2+z^2=x^2y^2$ joillain x, y, z. Jos kaikki luvut x, y ja z ovat kolmella jaollisia, yhtälöä voidaan supistaa kolmella, kunnes tullaan tilanteeseen, jossa ainakin yksi luvuista vasemman puolen yhteenlaskettava ei ole kolmella jaollinen. Voimme näin olle suoraan olettaa, että luvuista x, y, z ainakin yksi on kolmella jaoton. Silloin $x^2+y^2+z^2$ antaa 3:lla jaettaessa jakojäännöksen 1, 2 tai 0 sen mukaan, onko kolmella jaottomia lukuja 1, 2 vai 3. Ensimmäisessä tapauksessa $(xy)^2$:n jakojäännös kolmella jaettaessa on 1, mikä merkitsee, että kumpikaan luvuista x ja y ei ole jaollinen 3:lla, ja kolmella jaottomia lukuja onkin enemmän kuin yksi. Jakojäännös ei voi olla kaksi, koska tällöin $(xy)^2$:n jakojäännös olisi 2 eikä 0 tai 1, jotka kuitenkin ovat ainoat mahdollisuudet. Kolmannessa tapauksessa $(xy)^2$ olisi kolmella jaollinen, ja kolmella jaottomia lukuja olisikin enintää kaksi. Kaikissa tapauksissa johdutaan ristiriitaan. Tehtävän yhtälön toteuttavia lukuja ei ole olemassa.

317. Koska ratkaisujen summa on ensimmäisen asteen termin kertoimen vastaluku ja ratkaisujen tulo on nollannen asteen termi, on oltava $pq=q$ ja $p+q=-p$. Edellinen yhtälö toteuu, jos $p=1$ tai $q=0$. Jälkkimmäisestä yhtälöstä saadaan $q=-2$ tai $q=0$. Tarkistetaan, että yhtälöillä $x^2+x-2=0$ ja $x^2=0$ on tehtävässä vaadittu ominaisuus.

318. Koska $x_1+x_2 = -\dfrac{b}{a}$ ja $x_1x_2 = \dfrac{c}{a}$, niin

$$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2} = \frac{x_1^2+x_2^2}{x_1^2x_2^2} = \frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{(x_1x_2)^2} = \frac{\left(\dfrac{b}{a}\right)^2 - 2\dfrac{c}{a}}{\left(\dfrac{c}{a}\right)^2} = \left(\frac{b}{c}\right)^2 - 2\frac{a}{c}.$$

Vastaavasti

$$\begin{aligned}
x_1^4 + x_1^2x_2^2 + x_2^4 &= (x_1^2 + x_2)^2 - (x_1x_2)^2 = (x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2)(x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2) \\
&= \left((x_1 + x_2)^2 - x_1x_2\right)\left((x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2\right) = \left(\frac{b^2}{a^2} - \frac{c}{a}\right)\left(\frac{b^2}{a^2} - 3\frac{c}{a}\right) \\
&= \frac{b^4 - 4ab^2c + 3a^2c^2}{a^4}.
\end{aligned}$$

319. Merkitään $x + \dfrac{5}{2} = y$. Yhtälö saa nyt muodon

$$\left(y - \frac{5}{2}\right)\left(y - \frac{1}{2}\right)\left(y + \frac{1}{2}\right)\left(y + \frac{5}{2}\right) = \left(y^2 - \frac{25}{4}\right)\left(y^2 - \frac{1}{4}\right) = 8.$$

Merkitään vielä $y^2 = t$. Yhtälö on nyt

$$\left(t - \frac{25}{4}\right)\left(t - \frac{1}{4}\right) = t^2 - \frac{13}{2}t + \frac{25}{16} - 8 = 0.$$

Toisen asteen yhtälön ratkaisukaava antaa juuret $t = \dfrac{13}{4} \pm \sqrt{17}$. Kun palataan alkuperäiseen muuttujaan, saadaan neljä ratkaisua $x = -\dfrac{5}{2} \pm \sqrt{\dfrac{13}{4} \pm \sqrt{17}}$, missä ylemmat ja alemmat $+$ ja $-$-merkit voi yhdistellä kaikilla neljällä eri tavalla.

320. Kun yhtälö korotetaan kolmanteen potenssiin, saadaan sievennyksen jälkeen yhtäpitävä yhtälö

$$\sqrt[3]{x(2x-3)}\left(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2x-3}\right) = 3(x-1).$$

Kun vasemmalle puolelle sijoitetaan alkuperäisen yhtälön vasen puoli, saadaan $\sqrt[3]{12x(x-1)(2x-3)} = 3(x-1)$. Tämä sievenee muotoon $(x-1)(x-3)^2 = 0$. Ratkaisut ovat $x = 1$ ja $x = 3$.

321. Jos $a = 0$, ratkaisuksi käy vain $x = 0$. Oletetaan, että $a > 0$. Silloin myös $x \geq 0$. Näillä ehdoilla voidaan yhtälö korottaa toiseen potenssiin, $a - \sqrt{a+x} = x^2$, ja jos $x^2 \leq a$, niin tästä voidaan edelleen korottaa toiseen potenssiin, jolloin saadaan $a^2 - 2ax^2 + x^4 = a + x$. Koska tämä yhtälö on toista astetta a:n suhteen, voidaan ratkaista a x:n avulla: $a = x^2 + x + 1$ tai $a = x^2 - x$. Jälkimmäinen ratkaisu ei voi tulla kysymykseen. Edellinen antaa $x = -\dfrac{1}{2} \pm \sqrt{a - \dfrac{3}{4}}$. Vain ylempi merkki käy, ja jotta x olisi ei-negatiivinen, on oltava $a \geq 1$.

322. On oltava $xyz \neq 0$. Kun toisen yhtälön murtolausekkeet tehdään samannimisiksi ja otetaan huomioon kolmas yhtälö, saadaan $xyz = 27$. Kun viimeinen yhtälö kerrotaan z:lla ja otetaan huomioon $xyz = 27$, saadaan $27 + (x+y)z^2 = 27z$. Koska $x + y = 9 - z$, niin $z^3 - 9z^2 + 27z - 27 = 0$ eli $(z-3)^3 = 0$. Siis $z = 3$. Siis $xy = 9$ ja $x + y = 6$. Siis $x(6-x) = 9$ eli $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2 = 0$. Siis $x = 3$, $y = 3$.

323. Koska $a^2 = (x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx) = a^2+2(xy+yz+zx)$, on $xy+yz+zx=0$. Edelleen $a^3 = (x+(y+z))^3 = x^3+3x^2(y+z)+3x(y^2+2yz+z^2)+y^3+3y^2z+3yz^2+z^3 = x^3+y^3+z^3+3x(xy+yz+xz)+3y(xy+xz+yz)+3z^2(x+y) = a^3+3z^2(x+y)$. Siis $z^2(x+y)=0$. Jos $x+y=0$, niin $z=a$ ja $xy=0$. Siis $x=y=0$. Jos $z=0$, niin $x+y=a$ ja $xy=0$. Siis joko $x=a$ ja $y=0$ tai $x=0$ ja $y=a$. Kaikkiaan siis kolme ratkaisua: $(a,\ 0,\ 0)$, $(0,\ a,\ 0)$ ja $(0,\ 0,\ a)$.

324. Merkitään $\dfrac{x+y}{xy} = u$, $\dfrac{x-y}{xy} = v$. Yhtälöryhmä on nyt

$$\begin{cases} u + \dfrac{1}{u} = a + \dfrac{1}{a}, \\ v + \dfrac{1}{v} = b + \dfrac{1}{b}. \end{cases}$$

Yhtälöryhmän molemmat yhtälöt ovat toisen asteen yhtälöitä, joilla on enintään kaksi ratkaisua kummallakin. Heti näkee, että ensimmäisen yhtälön ratkaisut ovat $u_1 = a$, $u_2 = \dfrac{1}{a}$ ja toisen $v_1 = b$, $v_2 = \dfrac{1}{b}$. (Jos $|a| = 1$ tai $|b| = 1$, ratkaisut yhtyvät.) Ratkaistaan x ja y u:n ja v:n avulla: on oltava

$$\begin{cases} \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{x} = u, \\ \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{x} = v. \end{cases}$$

Näistä saadaan

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{2}(u-v), \\ \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{2}(u+v). \end{cases}$$

Jos $|a| \neq |b|$, saadaan pareista $u=a$, $v=b$ ja $u=\dfrac{1}{a}$, $v=\dfrac{1}{b}$ ratkaisut $x_1 = \dfrac{2}{a-b}$, $y_1 = \dfrac{2}{a+b}$, $x_2 = \dfrac{2ab}{b-a}$, $y_2 = \dfrac{2ab}{a+b}$. Jos $|ab| \neq 1$, saadaan pareista $u=a$, $v=\dfrac{1}{b}$ ja $u=\dfrac{1}{a}$, $v=b$ vielä ratkaisut $x_3 = \dfrac{2b}{ab-1}$, $y_3 = \dfrac{2b}{ab+1}$ ja $x_4 = \frac{2a}{1-ab}$, $y_4 = \dfrac{2a}{1+ab}$.

325. Lauseke on $a^{1/2}a^{1/4}a^{1/8}\ldots = a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots} = a^1 = a$.

326.

$$\frac{1}{2+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}} = \frac{1}{2^{1/3}(1+2^{1/3}+2^{2/3})} = \frac{2^{1/3}-1}{2^{1/3}(2\equiv 1)} = 1 - \frac{1}{2}2^{2/3}.$$

327. Koska $x = \dfrac{1}{2} - 2y$, $x^2 = \dfrac{1}{4} - 2y + 4y^2$ ja $x^2+y^2 = 5y^2 - 2y + \dfrac{1}{4} = \left(\sqrt{5}y - \dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{5} \geq \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{5} = \dfrac{1}{20}$.

328. Jos $1 \le k < n$, niin $\dfrac{n}{k} > 1$. Siis

$$\sqrt{\frac{n}{1}} + \sqrt{\frac{n}{2}} + \ldots + \sqrt{\frac{n}{n}} > 1 + 1 + \ldots + 1 = n.$$

Kun tämä yhtälö jaetaan puolittain luvulla $\sqrt{n}$, saadaan väite.

329. Jos jonon keskimmäinen luku on x, aritmeettisen jonon erotus d ja geometrisen jonon suhde q, niin ensimmäinen luku on $x - d = \dfrac{x}{q}$ ja kolmas $x + d = qx$. Yhteenlaskien saadaan $2x = \left(q + \dfrac{1}{q}\right)x$. Jos $x \neq 0$, on oltava $q + \dfrac{1}{q} = 2$ eli $q = 1$. Jonon luvut ovat kaikki samoja. Jos $x = 0$, tilanne on sama: kaikki kolme lukua ovat $= 0$.

330. Luvut a_k ovat positiivisia ja $a_{k+1} - a_k = d$. Voidaan olettaa, että $d \neq 0$. Silloin $a_n - a_1 = (n-1)d$ ja tehtävän yhtälön vasen puoli on

$$\begin{aligned}&\frac{\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2}}{a_1 - a_2} + \frac{\sqrt{a_2} - \sqrt{a_3}}{a_2 - a_3} + \ldots + \frac{\sqrt{a_{n-1}} - \sqrt{a_n}}{a_{n\equiv 1} - a_n}\\ &= \frac{\sqrt{a_1} - \sqrt{a_n}}{-d} = \frac{a_1 - a_n}{-d(\sqrt{a_1} + \sqrt{a_n})} = \frac{n-1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_n}}.\end{aligned}$$

331. Jos $|x| = 1$, summa on $4n$. Muussa tapauksessa summa on sama kuin

$$\begin{aligned}&x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} + x^4 + 2 + \frac{1}{x^4} + \ldots + x^{2n} + 2 + \frac{1}{x^{2n}}\\ &= 2n + \frac{x^2(x^{2n} - 1)}{x^2 - 1} + \frac{1}{x^2}\frac{1 - \dfrac{1}{x^{2n}}}{1 - \dfrac{1}{x^2}} = 2n + \frac{x^{2n} - 1}{x^2 - 1}\left(x^2 + \frac{1}{x^{2n}}\right).\end{aligned}$$

332. Polynomi $ax^{15} + bx^{14} + 1$ on jaollinen $(x-1)^2$:lla jos ja vain jos $a(y+1)^{15} + b(y+1)^{14} + 1$ on jaollinen y^2:lla. Mutta kun edellinen polynomi jaetaan y^2:lla, jakojäännöksen muodostavat ensimmäisen ja nollannen asteen termit, siis $(15a + 14b)y + a + b + 1$. Jakojäännös on identtisesti nolla, jos $15a + 14b = 0$ ja $a + b + 1 = 0$. Yhtälöt toteutuvat, kun $a = 14$, $b = -15$.

333. Jotta neliöjuuret olisivat määriteltyjä, on oltava $x + a \ge 0$. Koska yhtälön vasen puoli on ei-negatiivinen, on oikeankin puolen oltava ei-negatiivinen, eli $x \ge -2a$. Kun $x \ge \max\{-a, -2a\}$, molemmat puolet ovat määriteltyjä ja ei-negatiivisia, joten yhtälö säilyy yhtäpitävänä, kun molemmat puolet korotetaan toiseen potenssiin. Ratkaistavaksi tulee yhtälö $x^2 + 4a^2\sqrt{x+a} = x^2 + 4ax + 4a^2$. Jos $a = 0$, yhtälön toteuttavat kaikki ei-negatiiviset luvut. Jos $a \neq 0$, voidaan jakaa $4a$:lla, ja tullaan yhtälöön $a\sqrt{x+a} = x + a$. Tarkastellaan tapausta $a < 0$. Yhtälö voi toteutua vain, jos molemmat puolet ovat $= 0$. On oltava $x = -a < -2a$, ja tämä juuri ei edellä tehdyn huomautuksen mukaan voi tulla kysymykseen. Kun $a < 0$, yhtälöllä ei ole ratkaisua. Olkoon sitten $a > 0$. Nyt joko $x + a = 0$ tai $a = \sqrt{x+a}$ eli $x = a^2 - a$ (koska $a^2 > 0$, jälkimmäinenkin juuri on $> -a$ ja kelvollinen). Yhteenveto: yhtälöllä ei ole ratkaisuja, kun $a < 0$, sen toteuttavat kaikki ei-negatiiviset luvut, ja kun $a > 0$, ratkaisut ovat $x = -a$ ja $x = a^2 - a$.

334. Merkitään kolmion XYZ alaa $|XYZ|$. Jos kolmion ABC kärjestä C piirretty korkeusjana on h ja kolmion ABD kärjestä D piirretty korkeusjana on h_1, niin

$$\frac{|ABD|}{|ABC|} = \frac{h_1}{h}.$$

Toisaalta

$$\frac{DC'}{CC'} = \frac{h_1}{h}.$$

Kun sama päättely tehhdään muiden kolmion kärkien kohdalla, saadaan

$$\frac{DA'}{AA'} + \frac{DB'}{BB'} + \frac{DC'}{CC'} = \frac{|BCD|}{|ABC|} + \frac{|CAD|}{|ABC|} + \frac{|ABD|}{|ABC|} = \frac{|ABC|}{|ABC|} = 1.$$

335. Pienimmät kaksinumeroiset alkuluvut ovat 11 ja 13, joten d on tekijänä luvuissa $120 = 5\cdot 24$ ja $168 = 7\cdot 24$. Näiden lukujen suurin yhteinen tekijä on $24 = 3\cdot 8$. Osoitetaan, että $24|(p^2-1)$ aina, kun $p \geq 5$ on alkuluku. Tätä varten riittää, että osoitetaan p^2-1 jaolliseksi 3:lla ja 8:lla. Koska p on alkuluku, se on muotos $3k \pm 1$. Mutta $(3k\pm 1)^2 - 1 = 9k^2 \pm 6k$ ja siis jaollinen kolmella. Koska p on pariton luku, se on muotoa $8k+q$, missä $q = 1$, $q = 3$, $q = 5$ tai $q = 7$. $p^2 - 1 = 8r + q^2 - 1$, ja q^2 on jokin luvuista 1, 9, 25, 49. Kaikissa tapauksissa $q^2 - 1$ on jaollinen kahdeksalla, joten $p^2 - 1$ on jaollinen kahdeksalla.

336. Todistetaan induktiolla. Kun $n = 1$, epäyhtälö on

$$\frac{3}{2}(\sqrt[3]{4} - 1) < 1 < \frac{3}{2},$$

ja tämä on tosi epäyhtälö. Oletetaan sitten, että kun $n = k-1 \geq 1$, pätee

$$\frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{k^2} - 1\right) < 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[3]{k-1}} < \frac{3}{2}\sqrt[3]{(k-1)^2}.$$

Pyritään osoittamaan, että tällöin myös

$$\frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{(k+1)^2} - 1\right) < 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[3]{k}} < \frac{3}{2}\sqrt[3]{k^2}.$$

Induktio- oletuksen mukaan tämä tulee osoitetuksi, jos voidaan näyttää, että

$$\frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{(k+1)^2} - 1\right) < \frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{k^2} - 1\right) + \frac{1}{\sqrt[3]{k}}$$

ja

$$\frac{3}{2}\sqrt[3]{(k-1)^2} + \frac{1}{\sqrt[3]{k}} < \frac{3}{2}\sqrt[3]{k^2}.$$

Edellinen epäyhtälö on yhtäpitävä epäyhtälön

$$\sqrt[3]{(k+1)^2 k} < k + \frac{2}{3}$$

ja jälkimmäinen epäyhtälön

$$\frac{2}{3} < k - \sqrt[3]{(k-1)^2 k}.$$

kanssa. Edellinen epäyhtälö saadaan kolmanteen potenssiin korottamisen jälkeen yhtäpitävään muotoon

$$27(k^3 + 2k^2 + k) < 27k^3 + 54k^2 + 36k + 8$$

eli $0 < 9k + 8$, joka selvästi on tosi. Jälkimmäinen epäyhtälö saadaan samoin muotoon

$$27(k^3 - 2k^2 + k) < 27k^3 - 54k^2 + 36k - 8$$

eli $8 < 9k$, joka sekin on tosi. Induktioaskel on saatu otetuksi ja epäyhtälö todistetuksi.

337. Kaavan $(a+1)^3 = a^3 + 3a^2 + 3a + 1$ (Pascalin kolmion 3. rivi!) perusteella tehtävän luvut ovat tunnistettavissa luvuiksi $11^3 = (10+1)^3$, $101^3 = (100+1)^3$, $\ldots$, $(10^{k+1}+1)^3$.

338. $\dfrac{m}{3} + \dfrac{m^2}{2} + \dfrac{m^3}{6} = \dfrac{m^3 + 3m^2 + 2m}{6} = \dfrac{m(m+1)(m+2)}{6}$. Koska kolmesta peräkkäisestä kokonaisluvusta yksi on kolmella ja ainakin yksi kahdella jaollinen, osamäärää voidaan supistaa 6:lla.

339. [Oletamme, että kysytty luku on positiivinen kokonaisluku.] Yhdeksällä jaollisen luvun numeroiden summa on yhdeksällä jaollinen, 11:llä jaollisen luvun ensimmäisen, kolmannen, viidennen jne. numeron summa a vähennettynä toisen, neljännen, kuudennen jne. numeron summalla b on jaollinen 11:llä. Siis $a + b = 9n$, $a - b = 11m$, $a \geq 0$, $b \geq 0$, $n \geq 1$. Jos olisi $n = 1$, olisi $2a = 9 + 11m$, joten $m \geq 1$ ($m = 0$ ei parillisuuden vuoksi käy). Toisaalta olisi $2b = 9 - 11m$, joten $m \leq -1$. Ristiriita. Siis $n \geq 2$, $a + b \geq 18$.

340. Olkoon $x = 100y + z$, $0 \leq z \leq 99$. Jotta x^2 ja x päättyisivät samoihin kahteen numeroon, on luvun $x^2 - x$ oltava 100:lla jaollinen. Mutta $x^2 - x = 100^2y^2 + 200yz + z^2 - 100y - z$. On oltava $100|z(z-1)$. Jommankumman luvuista z tai $z - 1$ on oltava jaollinen 25:llä ja jommankumman 4:llä. Luvuksi $z = 10a + b$ kelpaavat näin ollen vain 0, 1, 25 ja 76.

341. $k + (k+1) + (k+2) + \ldots + (k+999) = 1000k + \dfrac{1}{2}(1000 \cdot 999) = 500(2k + 999)$; ei ole alkuluku.

342. Koska $p+q = p+p+2 = 2(p+1)$, riittää, kun varmistutaan, että $p+1$ on jaollinen 2:lla ja 3:lla. Mutta p on alkulukuna pariton, joten $p+1$ on parillinen. Kolmesta peräkkäisestä luvusta p, $p+1$ ja $p+2$ tasan yksi on jaollinen 3:lla. Koska p ja $p+2$ ovat alkulukuja, tämä kolmella jaollinen luku on $p+1$.

343. Jos $2p+1$ on kokonaisluvun x kuutio, niin x on pariton luku, $x = 2n+1$. On oltava $2p + 1 = (2n+1)^3 = 8n^3 + 12n^2 + 6n + 1$, $p = n(4n^2 + 6n + 3)$. Koska p on alkuluku, $n = 1$ ja $p = 4 + 6 + 3 = 13$ on ainoa mahdollisuus. Todellakin $2 \cdot 13 + 1 = 27 = 3^3$.

344. Koska $21^{39}+39^{21} = 3^{21}\left(3^{18}\cdot 7^{39}+13^{21}\right)$, luku on jaollinen luvulla 3^{21} ja siis varmasti myös luvulla $9 = 3^2$. Koska 1:een päättyvän luvun kaikki potenssit päättyvät 1:een ja 9:ään päättyvän luvun parittomat potenssit päättyvät 9:ään, $21^{39}+39^{21}$ päättyy nollaan ja on siis 5:llä jaollinen. Luku on jaollinen luvulla $45 = 9\cdot 5$.

345. [Jätämme pois laskuista luvun 0!; koska $0! = 1! = 1$ on kaikilla y $0!+y! = 1!+y!$.] Oletetaan, että $x!+y! = t!+u!$, $x \le y$, $t \le u$. Jos $x = t$, on myös $y = u$. Voidaan siis olettaa, että $x < t$. Silloin $x!\left(1+\dfrac{y!}{x!}\right) = t!\left(1+\dfrac{u!}{t!}\right)$, ja $1+\dfrac{y!}{x!} = \dfrac{t!}{x!}\left(1+\dfrac{u!}{t!}\right)$. Jos $x < y$, niin luku $x+1$ on tekijänä edellisen yhtälön oikeassa puolessa mutta ei vasemmassa (joka on muotoa 1+ $(x+1)$:llä jaollinen luku. Jos $x = y$, yhtälön vasen puoli on 2 ja oikea puoli kahden ykköstä suuremman luvun tulo. Kummassakin tapauksessa johdutaan ristiriitaan. Ei siis ole lukuja, jotka voisi kahdella eri tavalla esittää kahden kertoman summana.

346. Oletetaan, että x^4+4y^4 on alkuluku. Silloin $x > 0$ ja $y > 0$. Lisäksi $x^4+4y^4 = (x^2+2y^2)^2-4x^2y^2 = (x^2+2y^2+2xy)(x^2+2y^2-2xy) = \left((x+y)^2+y^2\right)\left((x\equiv y)^2+y^2\right)$. Koska x^4+4y^4 on alkuluku, pienemmän sen tekijöistä on oltava 1: $(x-y)^2+y^2 = 1$. Tämä onnistuu vain, jos $x = y$ ja $y = 1$. Ainoa ehdot täyttävä alkuluku on $1^2+4\cdot 1^2 = 5$.

347. Voidaan rajoittua tapaukseen $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$. On osoitettava. että xyz on jaollinen luvulla $3\cdot 4\cdot 5$. Jos mikään luvuista x, y, z ei ole jaollinen 3:lla, niin jokainen niistä antaa 3:lla jaettaessa jakojäännöksen 1 tai 2. Mutta silloin x^2, y^2 ja z^2 antavat kaikki jakojäännöksen 1; koska $1+1 \ne 1$, tämä on mahdotonta. Siis ainakin yksi luvuista x, y, z ja siten tulo xyz on jaollinen 3:lla. Vastaavasti nähdään, että jos xyz ei ole jaollinen 5:llä, niin z^2 antaa viidellä jaettaessa jakojäännöksen 1 tai 4 samoin kuin x^2 ja y^2. Mutta tällöin x^2+y^2 voi antaa vain jakojäännökset 2 tai 3, mikä olisi mahdotonta. Siis xyz:n on oltava jaollinen 5:llä. Jotta xyz ei olisi jaollinen 4:llä, olisi luvuista x, y, z enintään yhden oltava parillinen. Jos x ja y ovat parittomia, $x = 2a+1$, $y = 2b+1$, niin z on parillinen, $z = 2c$, ja $(2a+1)^2+(2b+1)^2 = 4c^2$ eli $4(a^2+b^2+a+b\equiv c^2)+2 = 0$. Koska 2 ei ole 4:llä jaollinen, tämä on mahdotonta. Jos $z = 2c+1$ ja $x = 2a+1$ ovat parittomia, y on parillinen, $y = 2b$. Saadaan $4a^2+4a+1+4b^2 = 4c^2+4c+1$ eli $b^2 = c(c+1)\equiv a(a+1)$. Koska $c(c+1)$ ja $a(a+1)$ ovat parillisia, b^2 ja siis b on parillinen. Täten y ja xyz on jaollinen 4:llä.

348. Havaitaan, että $f(1-x) = \dfrac{9^{1-x}}{9^{1-x}+3} = \dfrac{9}{9+3\cdot 9^x} = \dfrac{3}{9^x+3}$, ja $f(x)+f(1-x) = \dfrac{9^x}{9^x+3}+\dfrac{3}{9^x+3} = 1$. Siis

$$\sum_{k=1}^{1995} f\left(\frac{k}{1996}\right) = \sum_{k=1}^{997}\left[f\left(\frac{k}{1996}\right)+f\left(\frac{1996-k}{1996}\right)\right]+f\left(\frac{998}{1996}\right) = 997+\frac{3}{3+3} = 997\frac{1}{2}.$$

349. Voimme olettaa, että $a \ge b \ge c > 0$. Silloin $a-b \ge 0$, $b-c \ge 0$, $a-c \ge 0$, $\dfrac{a}{b} \ge 1$,

$\dfrac{a}{c} \geq 1$ ja $\dfrac{b}{c} \geq 1$. Siis

$$\frac{a^{3a}b^{3b}c^{3c}}{(abc)^{a+b+c}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}\left(\frac{a}{c}\right)^{a-c}\left(\frac{b}{c}\right)^{b-c} \geq 1.$$

350. ”Bumerangien” yli π:n suuruiset kulmat ovat kaikki C:n sisäosassa ja niiden kärjissä olevien nelikulmion kulmien summa on $2\pi b$. C:n kulmien summa on $(s-2)\pi$. Koska kaikkien nelikulmioiden kulmien summa on $2\pi q$, on $2\pi q \geq 2\pi b + (s-2)\pi$. Todistettava epäyhtälö seuraa välittömästi.

351. Tunnetusti

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Merkitään $c = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Jos $k \geq 1$ ja q on mielivaltainen positiivinen kokonaisluku, niin

$$\begin{aligned}&\left(c^k q^{3k+2}\right)^3 + \left(2c^k q^{3k+2}\right)^3 + \left(3c^k q^{3k+2}\right)^3 + \ldots + \left(nc^k q^{3k+2}\right)^3 \\ &= c^{3k} q^{3(3k+2)}(1^3 + 2^3 + \ldots + n^3) = c^{3k+2} q^{3(3k+2)} = (cq^3)^{3k+2}.\end{aligned}$$

Ratkaisuja on jokaisella $k \geq 1$ äärettömän monta, koska q voidaan valita vapaasti.

352. Nähdään, että $u_1 = 1 - u$. Olkoon $u \leq x$, jolloin $1 - x \leq 1 - u$. Silloin

$$\begin{aligned}1 - \left(\sqrt{ux} + \sqrt{(1-u)(1-x)}\right)^2 &= 1 - ux - (1-u)(1-x) - 2\sqrt{ux(1-u)(1-x)} \\ = u + x - 2ux - 2\sqrt{ux(1-u)(1-x)} &\leq u + x - 2ux - 2u(1-x) = x - u.\end{aligned}$$

Jos $u_1 \geq u$, niin $u_2 = f(u_1) \leq u_1 - u = 1 - 2u$. Induktiolla nähdään, että jos $u_i \geq u$, $i = 1$, $2, \ldots, n$, niin $u_{n+1} = f(u_n) \leq u_n - u \leq 1 - (n+1)u$. Mutta jollain n on $1 - un < u$, ja silloin $u_{n+1} = f(u_n) = 0$ määritelmän mukaan.

353. Muotoillaan väitösepäyhtälön vasenta puolta, jotta päästään käyttämään oletusta hyväksi: $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2 + c^2 - 2bc + b^2 = 3(a^2 + b^2 + c^2) - (a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac) = 3 - (a+b+c)^2 \leq 3$.

354. Käytetään ns. äärettömän laskeutumisen menetelmää. Tämä päättelytapa on peräisin monista lukuteorian tuloksista kuuluisalta Pierre de Fermat'lta 1600Œluvun alkupuolelta. Oletetaan, että, toisin kuin väitetään, luku $N = 2(m^2 + mn + n^2)$ olisi kokonaisluvun neliö. Parillisena lukuna sen on oltava parillisen luvun neliö eli jaollinen 4:llä. Tästä seuraa, että luvun $m^2 + mn + n^2$ on oltava parillinen. Jos m ja n olisivat molemmat parittomia tai jos tasan toinen luvuista olisi pariton, $m^2 + mn + n^2$:ssa olisi kolme paritonta yhteenlaskettavaa tai yksi pariton yhteenlaskettava, ja luku itse olisi pariton. Tästä seuraa, että sekä m että n ovat parillisia, $m = 2m_1$, $n = 2n_1$. Mutta silloin

$2((2m_1)^2 + (2m_1)(2n_1) + (2n_1)^2) = 8(m_1^2 + m_1n_1 + n_1^2)$ olisi kokonaisluvun neliö, joten edelleen $2(m_1^2 + m_1n_1 + n_1^2) = \frac{N}{4}$ olisi kokonaisluvun neliö. Näin jatkaen saataisiin päättymätön jono yhä pienempiä ja pienempiä muotoa $2(m^2 + mn + n^2)$ olevia kokonaisluvun neliöitä, mikä on mahdotonta. – Toinen tapa rakentaa todistus olennaisesti saman idean ympärille on havainto, että jos tehtävän mukaisia kokonaisluvun neliöitä ylipäänsä olisi olemassa, niin jokin niistä olisi kaikkein pienin. Edellä esitetty konstruktio synnyttäisi kuitenkin vielä pienemmän, ja ristiriita olisi valmis.

355. Tehtävän ratkaisu käy helposti Cevan lauseelle sukua olevan *Menelaoksen lauseen* avulla. Tällä lauseella on yleisempääkin käyttöä, joten esitetään ensin se todistuksineen:

Lause. *Jos suora ℓ leikkaa kolmion ABC sivut BC, CA ja AB (tai niiden jatkeet) pisteissä X, Y ja Z, niin*

$$\frac{BX}{CX}\frac{CY}{AY}\frac{AZ}{BZ} = 1. \tag{1}$$

Kääntäen, jos (1) pätee kolmion ABC sivuilla tai niiden jatkeilla oleville pisteille X, Y ja Z, niin pisteet ovat samalla suoralla. [Erotukseksi Cevan lauseesta tämä teoreema pitäisi kyllä täsmällisesti ottaen muotoilla niin, että kolmion jokaiselle sivulle kiinnitettäisiin positiivinen ja negatiivinen suunta, ja yhtälö (1) kirjoitettaisiin muotoon

$$\frac{BX}{XC}\frac{CY}{YA}\frac{AZ}{ZB} =\equiv 1.\ ]$$

Todistus: Oletetaan, että X, Y ja Z ovat suoralla ℓ ja että pisteiden A, B ja C kohtisuorat etäisyydet suorasta ℓ ovat a, b ja c. Silloin $\frac{BX}{CX} = \frac{b}{c}$, $\frac{CY}{AY} = \frac{c}{a}$ ja $\frac{AZ}{BZ} = \frac{a}{b}$. Yhtälö (1) saadaan, kun edelliset kolme yhtälöä kerrotaan keskenään. Olkoot X, Y ja Z pisteitä, jotka toteuttavat yhtälön (1). Oletetaan, että AB ja XY leikkaavat pisteessä Z'. Sen mukaan, mitä juuri todistettiin,

$$\frac{BX}{CX}\frac{CY}{AY}\frac{AZ'}{BZ'} = 1.$$

Kun otetaan huomioon (1), niin nähdään, että

$$\frac{AZ'}{BZ'} = \frac{AZ}{BZ},$$

mikä merkitsee, että $Z' = Z$. $\square$

Tehtävän ratkaisu saadaan suoraan Menelaoksen lauseesta:

$$\frac{AO}{OD} = \frac{BC}{BD}\frac{EA}{CE} = \frac{11}{4}\cdot\frac{2}{3} = \frac{11}{6}.$$

356. r-säteisen ympyrän sisään piirretty säännöllinen n-kulmio koostuu n:stä tasakylkisestä kolmiosta, jonka ala on $\frac{1}{2}r^2\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$. Saadaan siis

$$\frac{m}{n} = \frac{m\cdot\frac{1}{2}r^2\sin\left(\frac{2\pi}{m}\right)}{n\cdot\frac{1}{2}r^2\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}$$

eli $\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{m}\right)$. Tämä toteutuu, kun joko $m = n$ tai $\frac{2\pi}{n} = \pi - \frac{2\pi}{m}$ eli $\frac{2}{n} = 1 - \frac{2}{m}$ eli $(m-2)(n-2) = 4$. Jos $m \neq n$, niin ratkaisuja ovat $m = 3$, $n = 6$ ja $m = 6$, $n = 3$.

357. Yhdistettyjä parittomia lukuja ovat 9, 15, 21, 25, 27, 33, 35, 39 . . . , joten lukuja, jotka voidaan lausua kahden yhdistetyn parittoman luvun summana ovat 18, 24, 30, 36, 40, 42, 44, 46, 48, 50, ... Itse asiassa jokainen parillinen luku, joka on ≥ 40, voidaan kirjoittaa halutulla tavalla: $40+10k = 25+5(3+2k)$, $42+10k = 27+5(3+2k)$, $44+10k = 9+5(7+2k)$, $46+10k = 21+5(5+2k)$ ja $48+10k = 33+5(3+2k)$. Tehtävässä kysytty luku on siis 38.

358. Selvästikään lukua 35 ei voi kirjoittaa muotoon $5x + 7y$, $x > 0$, $y > 0$, sillä jos olisi $35 = 5x + 7y$, olisi $5x$ jaollinen 7:llä, x jaollinen 7:llä ja $5x < 35$, joten $x < 7$. Siis $x = 0$, mikä on ristiriita. Mutta $36 = 3\cdot 7+3\cdot 5$, $37 = 1\cdot 7+6\cdot 5$, $38 = 4\cdot 7+2\cdot 5$, $39 = 2\cdot 7+5\cdot 5$ ja $40 = 5\cdot 7 + 1\cdot 5$. Jos $n > 40$, niin $n = m + 5k$, missä $36 \leq m \leq 40$. Siis kaikki luvut $n \geq 36$ ovat muotoa $5x + 7y$.

359. Koska $\angle APB = \angle APC = 60°$ ja $\angle BPC = 120°$, kolmioiden BPQ ja QPC alat ovat $\frac{1}{2}BP\cdot PQ\cdot\sin 60°$ ja $\frac{1}{2}\cdot PQ\cdot PC\cdot\sin 60°$ ja kolmion BPC ala on $\frac{1}{2}\cdot BP\cdot PC\cdot\sin 120°$. Koska $\sin 60° = \sin 120°$ ja kolmioiden BPQ ja QPC alojen summa on kolmion BPC ala, saadaan $BP\cdot PQ + PQ\cdot PC = BP\cdot PC$, Todistettava kaava saadaan, kun tämä yhtälö jaetaan puolittain $BP\cdot PQ\cdot PC$:llä.

360. Olkoon $a = \sqrt{2x-1} \geq 0$ ja $b = \sqrt{y+3} \geq 0$. Silloin $a + b = 3$ ja $a^2b^2 = (2x-1)(y+3) = 2xy + 6x - y - 3 = 7 - 3 = 4$, joten $ab = 2$. a ja b toteuttavat kumpikin toisen asteen yhtälön, joten mahdollisia a:n arvoja ja mahdollisia b:n arvoja on enintään kaksi. Yhtälöitä kirjoittamattakin huomataan, että $a = 1$, $b = 2$ ja $a = 2$, $b = 1$ ovat ratkaisuja. Muita ei siis ole. Vastaavat parit (x, y) ovat $(1, 1)$ ja $\left(\frac{5}{2}, -2\right)$.

361. Muodostetaan n-numeroisten, ei peräkkäisiä nollia sisältävien jonojen lukumäärälle a_n. Tällaiset jonot joko alkavat nollalla tai alkavat jollain muulla numerolla kuin nollalla. Edellisessä tapauksessa toinen numero on muu kuin nolla ja loput numerot muodostavat $n-2$-numeroisen kaksoisnollattoman jonon. Tällaisia n-numeroisia jonoja on siis $9a_{n-2}$. Jonoja, joissa ensimmäinen numero ei ole nolla, on puolestaan $9a_{n-1}$ kappaletta. Siis $a_n = 9(a_{n-1} + a_{n-2})$. Selvästi $a_1 = 10$ ja $a_2 = 99$. Siis $a_3 = 981$, $a_4 = 9720$ ja $a_5 = 96309$.

362. 1. todistus: Koska $4^n + 2 = 4^n - 1 + 3$, riittää, kun todetaan, että $4^n - 1$ on jaollinen 3:lla. Mutta tämä seuraa heti hajotelmasta $4^n - 1 = 4^n - 1^n = (4-1)(4^{n-1} + 4^{n-2} + \ldots + 1)$.
2. todistus. $4^0 + 2 = 3$. Oletetaan, että $4^n + 2 = 3k$. Silloin $4^{n+1} = 12k - 8$ ja $4^{n+1} + 2 = 12k - 6 = 3(4k-3)$. Induktioperiaatteen nojalla väite on tosi.

363. Kun kello on x minuuttia yli viiden, niin minuuttiosoitin on kiertynyt $(6x)°$ pystysuorasta suunnasta ja tuntiosoitin on kiertynyt $150° + \left(\frac{x}{2}\right)°$. Ne minuuttimäärät, jolloin osoittimet ovat suorassa kulmassa, saadaan yhtälöistä $150 + \frac{1}{2}x - 6x = \pm 90$. Ratkaisut ovat $x = \frac{120}{11}$ ja $x = \frac{480}{11}$. Koska $\frac{480}{11} - \frac{120}{11} = \frac{360}{11} = 32\,\frac{8}{11}$, hetkien välillä on tasan $32\,\frac{8}{11}$ minuuttia.

364. Epäyhtälö saadaan esim. seuraavasta epäyhtälöketjusta:

$$\left(7^{\sqrt{5}}\right)^{\sqrt{5}} = 7^5 = 16807 > 15625 = 5^6 = 5^{\sqrt{36}} > 5^{\sqrt{35}} > \left(5^{\sqrt{7}}\right)^{\sqrt{5}}.$$

365. [Tehtävät, joissa pyritään määrittämään jonkin ehdon täyttävä funktio eikä vain ehdon täyttävää lukuarvoa (kuten "tavallisessa" yhtälönratkaisussa), ovat *funktionaaliyhtälö*tehtäviä.] Kun sijoitetaan $x = y = 0$, saadaan $f(0)^2 - f(0) = 0$. Siis $f(0) = 0$ tai $f(0) = 1$. Kun sijoitetaan $x = 0$ ja $y = 1$, saadaan $f(0)(f(1) - 1) = 1$, joten $f(0) \neq 0$. Siis $f(0) = 1$. Sijoitetaan vielä $y = 0$. Saadaan $f(x) \cdot 1 - 1 = x$. On oltava $f(x) = x + 1$. Ratkaisu ei ole täydellinen, ellei vielä todisteta, että $f(x) = x + 1$ toteuttaa annetun funktionaaliyhtälön. [Päättelyketju f:ltä vaadittavasta yhtälöstä yhtälöön, jossa f ilmaistaan lausekkeen avulla, saattaa tuoda mukanaan ylimääräisiä "ratkaisuja", jotka eivät kuitenkaan toteuta alkuperäistä yhtälöä]. Jos $f(x) = x + 1$, niin todellakin $f(x)f(y) - f(xy) = (x+1)(y+1) - xy - 1 = xy + x + y + 1 - xy - 1 = x + y$.

366. Asia on selvä, jos luvuista kaksi on sellaista, että niiden erotus on jaollinen 9:llä. Oletetaan, että näin ei ole asia. Jokainen luvuista antaa 9:llä jaettaessa jakojäännökseksi jonkin luvuista 0, 1, 2 $\ldots$, 8. Tarkastellaan joukkoja $\{0\}$, $\{1, 8\}$, $\{2, 7\}$, $\{3, 6\}$ ja $\{4, 5\}$. Kuudesta luvusta ainakin 2, a ja b, ovat sellaisia, että niiden jakojäännökset 9:llä jaettaessa ovat yhdessä ja samassa joukossa, joka ei ole $\{0\}$. Koska jakojäännökset ovat eri lukuja, $a + b$ on jaollinen 9:llä.

367. Olkoon pisteen C peilikuva suoran AB suhteen C'. Silloin $CC' = 2 \cdot CH = AB$. Olkoon O pisteiden C, A ja C' kautta piirretyn ympyrän keskipiste. O on suoralla AB. Koska kulma $CAC' = 2\cdot 75^\circ = 150^\circ$, on vastaava kehäkulma eli suurempi kulmista $COC' = 2 \cdot 150^\circ = 300^\circ$. Silloin pienempi kulmista COC' on 60°. Kolmio COC' on näin ollen tasasivuinen, ja $\angle OCH = 60^\circ$. Koska $\angle ACH = 90^\circ - \angle CAB = 15^\circ$, $\angle ACO = 75^\circ$. Kolmio OCA on tasakylkinen, $AO = CO$. Mutta $AB = CC' = CO = AO$. Siis $B = O$, ja $\angle ABC = \angle AOC = 30^\circ$.

368. Merkitään kolmion AEF alaa a:lla ja kolmion AFD alaa b:llä. Kysytty nelikulmion ala on siten $a + b$. Koska samakorkeuksisten kolmioiden alat suhtautuvat kuten kolmioiden kannat, on $\frac{a+b+8}{a} = \frac{15}{5} = 3$ eli $2a - b = 8$ ja $\frac{a+b+5}{b} = \frac{18}{8}$ eli $4a - 5b = -20$. Näistä ratkaistaan $a = 10$, $b = 12$, josta $a + b = 22$.

369. Yhtälö voidaan kirjoittaa muotoon $m^3 + (-n)^3 + (-2)^3 - 3(-2)m(-n) = 0$. Käytetään hyväksi tekijöihinjakoa $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$. [Todistus: Tarkastellaan polynomia $x^3 - 3bcx + b^3 + c^3$. $x = -b - c$ on tämän polynomin 0-kohta:

$-(b+c)^3+3bc(b+c)+b^3+c^3=-b^3-3b^2c-3bc^2-c^3+3b^2c+3bc^2+b^3+c^3=0$. Kun $x^3-3bcx+b^3+c^3$ jaetaan $x+b+c$:llä esim. jakokulmassa, saadaan $x^3+b^3+c^3-3bcx=(x+b+c)(x^2+b^2+c^2-bx-cx-bc)$; kun x korvataan a:lla, saadaan haluttu identiteetti.] Sen perusteella

$$\begin{aligned} m^3-n^3-8-6mn &= m^3+(-n)^3+(-2)^3-3m(-n)(-2) \\ &= (m-n-2)(m^2+n^2+4+2m-2n+mn) \\ &= (m-n-2)\left(\frac{1}{2}(m+n)^2+\frac{1}{2}(m+2)^2+\frac{1}{2}(n-2)^2\right)=0, \end{aligned}$$

jos joko $m=n+2$ tai $m=-2$ ja $n=2$.

370. Tarkastellaan lukujen jakojäännöksiä 5:llä jaettaessa. Mikään niistä ei ole 0. Muut jakojäännökset jaetaan kahdeksi joukoksi $\{1,\ 4\}$ ja $\{2,\ 3\}$. Kolmesta luvusta kaksi, esimerkiksi x ja y, antavat jakojäännöksen, joka kuuluu samaan joukkoon. Jos jakojäännökset ovat samat, niin lukujen erotus on jaollinen 5:llä, ja $x^2-y^2=(x-y)(x+y)$ on jaollinen 5:llä. Jos jakojäännökset ovat eri suuret, niiden summa on 5, jolloin $x+y$ ja siten myös x^2-y^2 on jaollinen 5:llä.

371. Kun tietoa $abc=1$ käytetään toistuvasti hyväksi, saadaan

$$\begin{aligned} \frac{a}{ab+a+1}+\frac{b}{bc+b+1}+\frac{c}{ca+c+1} &= \frac{a}{ab+a+1}+\frac{ab}{abc+ab+a1}+\frac{abc}{abca+abc+ab} \\ &= \frac{a}{ab+a+1}+\frac{ab}{1+ab+a}+\frac{1}{a+1+ab}=1. \end{aligned}$$

372. Käytetään hyväksi tietoja $\sin 60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ja $\cos 60^\circ=\dfrac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} &\sin^2 20^\circ+\sin^2 40^\circ+\sin^2 80^\circ=\sin^2 20^\circ+\sin^2(60^\circ-20^\circ)+\sin^2(60^\circ+20^\circ) \\ &=\sin^2 20^\circ+(\sin 60^\circ\cos 20^\circ-\cos 60^\circ\sin 20^\circ)^2+(\sin 60^\circ\cos 20^\circ-\cos 60^\circ\sin 20^\circ)^2 \\ &=\sin^2 20^\circ+\frac{3}{2}\cos^2 20^\circ+\frac{1}{2}\sin^2 20^\circ=\frac{3}{2}(\sin^2 20^\circ+\cos^2 20^\circ)=\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

373. Yhtälö voidaan jakaa puolittain 3:lla, eli se on yhtäpitävä yhtälön $19m-29n=114=6\cdot 19$. Tästä seuraa, että n on jaollinen 19:llä. Jos $n=19k$, niin $m=6+29k$. Kääntäen nähdään heti, että kaikki parit $(m,\ n)=(6+29k,\ 19k)$ toteuttavat yhtälön.

374. Jos kolmion sivu on a, niin sen ala on $\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$. Toisaalta ala on kolmioiden PAB, PBC ja PCA alojen $\dfrac{1}{2}\cdot 10a$, $\dfrac{1}{2}\cdot 6a$ ja $\dfrac{1}{2}\cdot 8a$ summa. Kun näin syntyvästä yhtälöstä ratkaistaan a, saadaan $a=16\sqrt{3}$. Näin ollen kolmion ABC ala on $192\sqrt{3}$.

375. Tehdään muuttujanvaihto $x = y+1$. [Tämä on vakiosijoitus, jolla 4. asteen yhtälöstä voidaan hävittää 3. asteen termi.] Saadaan $(y+1)^4 - 4(y+1)^3 - 2(y+1)^2 + 12(y+1) + 8 = y^4 + 6y^2 + 4y + 1 - 12y^2 - 12y - 4 - 2y^2 - 4y - 2 + 12y + 20 = y^4 - 8y^2 + 15 = 0$, kun $y^2 = 3$ tai $y^2 = 5$. Alkuperäiseen muuttujaan siirtymällä saadaan ratkaisut $x = 1 \pm \sqrt{3}$ ja $x = 1 \pm \sqrt{5}$.

376. Asetetaan luvut suuruusjärjestykseen $a_1 < a_2 < \ldots < a_{21}$. Silloin $a_1+a_2+\ldots+a_{11} > a_{12} + a_{13} + \ldots + a_{21} > a_2 + a_3 + \ldots + a_{11}$. Mutta tästä seuraa, että $a_1 > 0$, joten kaikki muutkin luvut ovat positiivisia.

377. Eri puhelinnumeroita voi olla enintään 10^5. Jos otetaan mitkä hyvänsä 10^5+1 kuusinumeroista sarjaa, niin jokin numero esiintyy ensimmäisenä numerona ainakin 10^4+1:ssä sarjassa. Näistä ainakin 10^3+1 on oltava sellaista, joissa on sama toinenkin numero. Edelleen niistä ainakin 10^2+1 on sellaisia, joissa kolmaskin numero on sama; 11 sellaista, joissa vielä neljäs numero on sama, ja näistä ainakin kaksi sellaista, joissa vielä viideskin numero on sama. Nämä kaksi eroavat enintään yhden numeron, nimittäin viimeisen suhteen. Toisaalta ehdot täyttävät 10^5 numeroa voidaan valita: valitaan 10^5 eri viiden numeron sarjaa ja kuudes numero niin, että sarjan numeroiden summa tulee 10:llä jaolliseksi. Mitkä hyvänsä kaksi näin valittua numerosarjaa eroavat ainakin kerran 5:n ensimmäisen numeron kohdalla. Jos viiden ensimmäisen numeron joukossa on vain yksi ero, niin kuudennet numerot ovat myös erilaiset.

378. Jos ympyrän säde on r, neliön sivu a, tasasivuisen kolmion kylki b ja kuvioiden yhteinen ala S, niin $S = \pi r^2 = a^2 = \dfrac{\sqrt{3}}{4}b^2$. Siis $r = \sqrt{\dfrac{S}{\pi}}$, $a = \sqrt{S}$, $b = \dfrac{2S}{\sqrt{\sqrt{3}}} = \dfrac{2S\sqrt[4]{27}}{3}$. Kuvioiden piirien suhde on siis $2\pi r : 4a : 3b = 2\sqrt{\pi S} : 4\sqrt{S} : 2\sqrt{S}\cdot\sqrt[4]{27} = \sqrt{\pi} : 2 : \sqrt[4]{27}$.

379. Olkoon $ABCD$ (kupera tai ei-kupera) nelikulmio, K, L, M ja N sen sivujen AB, BC, CD ja DA keskipisteet. Kolmiot ABC ja KLB ovat yhdenmuotoiset (sks) suhteessa $2:1$, joten $KL \| AC$ ja $KL = \dfrac{1}{2}AC$. Kolmioista ACD ja NMD saadaan samoin $NM \| AC$ ja $NM = \dfrac{1}{2}AC$. Nelikulmiossa $KLMN$ ovat sivut KL ja NM yhdensuuntaiset ja yhtä pitkät, joten nelikulmio on suunnikas.

380. Olkoon AB suunnikkaan $ABCD$ pitempi sivu, $\angle BAD = 2\alpha$, $\angle ADC = 2\beta$. Leikatkoon kulman A puolittaja kulman B puolittajan pisteessä K ja kulman D puolittajan pisteessä L. Vastaavasti kulman C puoittaja leikkaa kulman D puolittajan pisteessä M ja kulman B puolittajan pisteessä N. Leikatkoon kulman D puolittaja vielä janan AB pisteessä E. Koska $2\alpha + 2\beta = 180^\circ$, on $\alpha + \beta = 90^\circ$. Kolmiosta ALD nähdään, että $AL \perp LD$. Samoin nähdään, että nelikulmion $LMNK$ kaikki lulmat ovat suoria. Kolmio AED on tasakylkinen ($\angle ADE = \beta = \angle AED$), joten $EB = AB - AE = AB - AD$. Kolmiot AEL ja CBN ovat yhteneviä (kks), joten $NB = LE$. Mutta tästä seuraa, että $LEBN$ on suunnikas, joten $LN = EB = AB - AD$.

381. Jatketaan janaa AB AP:n pituisella janalla BB'. Jaetaan jana AB' $(n+1)$:een yhtä pitkään osaan jakopisteillä, joiden joukossa ovat P ja B. Jakopisteiden kautta piirretyt DP:n suuntaiset suorat jakavat AC:n $(n+1)$:een yhtä pitkään osaan, joista yksi on AQ. Siis $AC = (n+1)AQ$.

382. Jos O on tehtävän ympyrän keskipiste, niin $OC \perp CD$ eli $OC \| AD$. Siis $\angle DAC = \angle ACO$. Mutta kolmio OAC on tasakylkinen, joten $\angle CAB = \angle ACO$.

383. Olkoon D suorakulmaisen kolmion ABC kateetin AC keskipiste ja E D:n kohtisuora projektio hypotenuusalla AB. Merkitään kolmion ABC sivujen pituuksia a:lla, b:llä ja c:llä. Kolmioiden AED ja ACB yhdenmuotoisuuden perusteella $AE = \dfrac{b}{c}AD = \dfrac{b^2}{2c}$. Siis $EB = c - \dfrac{b^2}{2c} = \dfrac{2c^2 - b^2}{2c}$. Suoraan laskemalla ja Pythagoraan lausetta kerran käyttämällä saadaan $EB^2 - AE^2 = \dfrac{4c^4 - 4c^2b^2 + b^4 - b^4}{4c^2} = c^2 - b^2 = a^2$.

384. Olkoon taas $AB = c$, $BC = a$ ja $CA = b$. Olkoon F D:n kohtisuora projektio AC:llä ja G E:n kohtisuora projektio BC:llä. Silloin $CG = \dfrac{2}{3}a$ ja $CF = \dfrac{2}{3}b$, $EG = \dfrac{1}{3}b$ ja $FD = \dfrac{1}{3}a$. Kun sovelletaan Pythagoraan lausetta suorakulmaisiin kolmioihin DCF ja CEG ja lopuksi kolmioon ABC, saadaan $CD^2 + DE^2 + EC^2 = \dfrac{1}{9}a^2 + \dfrac{4}{9}b^2 + \dfrac{1}{9}c^2 + \dfrac{1}{9}b^2 + \dfrac{4}{9}a^2 = \dfrac{5}{9}(a^2 + b^2) + \dfrac{1}{9}c^2 = \dfrac{6}{9}c^2 = \dfrac{2}{3}AB^2$.

385. Piirretään P:n kautta AC:n ja BC:n suuntaiset suorat, jotka leikkaavat BC:n pisteissä B_1 ja C_1. Kolmio PB_1C_1 on yhdenmuotoinen kolmion ABC kanssa. Jana AA' ei voi olla pitempi kuin pitempi janoista AB, AC, joten $AA' \leq BC$. Yhdenmuotoisuuden perusteella $PA' \leq B_1C_1$. Valitaan vielä AB:ltä piste A_1 ja AC:ltä piste A_2 niin, että $B_1A_1 \| PC'$, $C_1A_2 \| PB'$. Nyt $\angle B_1A_1B$ on kolmion A_1BB_1 suurin kulma ($\angle A$ on kolmion ABC suurin kulma ja $\angle A_1B_1B = \angle C'CB < \angle ACB$), joten BB_1 on kolmion A_1BB_1 pisin sivu. Siis $BB_1 > PC'$. Samoin näytetään, että $C_1C > PB'$. Siis $a = BB_1 + B_1C_1 + C_1C > PA' + PB' + PC'$.

386. Olkoot x (y, z) pisteen P etäisyydet tasasivuisen kolmion ABC siitä sivuista, jolla X (Y, Z) on. Jos h on kolmion korkeus ja a sen sivu, niin laskemalla kolmioiden ABP, BCP ja CAP alat yhteen saadaan $\dfrac{1}{2}a(x + y + z) = \dfrac{1}{2}ah$. Siis $x + y + z = h$. Mutta $PX \geq x$, $PY \geq y$, $PZ \geq z$, mistä väite seuraakin.

387. Merkitään kolmion PQR alaa symbolilla $|PQR|$. Oletetaan , että AX, BY ja CZ kulkevat saman pisteen P kautta. Käytetään hyväksi seuraavaa yksinkertaista laskutemppua: jos $\dfrac{a}{b} = x$ ja $\dfrac{c}{d} = x$, niin $\dfrac{a-c}{b-d} = x$. (Todistus: $\dfrac{a-c}{b-d} = \dfrac{bx - dx}{b-d} = x$.) Koska samakorkeuksisten kolmioiden alat suhtautuvat toisiinsa kuten kolmioiden kannat, niin

$\frac{BX}{XC} = \frac{|BXP|}{|XCP|} = \frac{|BXA|}{|XCA|}$. Edellä kuvatun "tempun" nojalla on siis $\frac{BX}{XC} = \frac{|BPA|}{|CPA|}$. Samoin $\frac{CY}{YA} = \frac{|CPB|}{|APB|}$ ja $\frac{AZ}{ZB} = \frac{|APC|}{|BPC|}$. Siis $\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = \frac{|BPA||CPB||APC|}{|CPA||APB||BPC|} = 1$.

"Vain jos" -osa väitteestä on todistettu. Oletetaan sitten, että $\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1$. Janat AX ja BY leikkaavat toisensa pisteessä Q. Leikatkoon suora CQ AB: pisteessä Z'. Jo todistetun perusteella on $\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ'}{Z'B} = 1$. Mutta tämä merkitsee, että $\frac{AZ}{ZB} = \frac{AZ'}{Z'A}$. Viimeinen yhtälö on mahdollinen vain, jos $Z' = Z$. Siis CZ kulkee AX:n ja BY:n leikkauspisteen kautta, eli kaikki kolme janaa leikkaavat toisensa samassa piseessä.

388. Cevan lauseen nojalla $CN \cdot AM \cdot BK = NA \cdot MB \cdot KC$. Piirretään B:n kautta AC:n suuntainen suora. Leikatkoon NK tämänsuoran pisteessä K' ja NM pisteessä M'. Kolmioiden ANM ja $BM'M$ yhdenmuotoisuuden perusteella $BM' = \frac{MB \cdot NA}{AM}$. Vastaavasti yhdenmuotoisista kolmioista CNK ja $BK'K$ saadaan $BK' = \frac{BK \cdot CN}{KC}$. Siis $BM' = BK'$. Suorakulmaisista kolmioista $K'NB$ ja $M'NB$ saadaan $\angle K'NB = \angle M'NB$, niin kuin pitikin.

389. Jos r on suorakulmaisen kolmion ABC sisään piirretyn ympyrän säde, ja jos ympyrän ja sivujen BC, CA ja AB sivuamispisteet ovat A', B' ja C', niin $CA' = CB' = r$, $AC' = AB' = b - r$ ja $BC' = BA' = a - r$, joten $c = b - r + a - r = a + b - 2r$. Toisaalta $AB = c$ on kolmion ympäri piirretyn ympyrän halkaisija, joten väite on todistettu.

390. Palautetaan mieleen käsite pisteen potenssi ympyrän suhteen. Jos P on piste ja kaksi P:n kautta kulkevaa suoraa leikkaa saman ympyrän $\mathcal{Y}$, toinen pisteissä X ja Y, toinen pisteissä Z ja T, niin $PX \cdot PY = PZ \cdot PT$. Tämä vain P:stä ja ympyrästä $\mathcal{Y}$ riippuva tulo on P:n potenssi $\mathcal{Y}$:n suhteen. – Olkoon O kolmion ABC ympäri ja I sen sisään piirretyn ympyrän keskipiste. Leikatkoon suora OI kolmion ympäri piirretyn ympyrän pisteissä M ja N. Pisteen I potenssi tämän ympyrän suhteen on $MI \cdot IN = (R + d)(R - d) = R^2 - d^2$. Potenssi on myös $AI \cdot ID$, missä D on AI:n ja ympäri piirretyn ympyrän toinen leikkauspiste. Olkoon F suoran DO ja ympäri piirretyn ympyrän toinen leikkauspiste ja E pisteen I kohtisuora projektio AB:llä. Osoitetaan, että tulo $AI \cdot ID$ on $r \cdot (2R)$, mikä todistaakin väitteen. Koska I on kolmion ABC kulmanpuolittajien leikkauspiste, ja kulmat CBD ja CAD samaa kaarta vastaavina kehäkulmina yhtä suuret, on $\angle BID = \angle BAI + \angle IBA = \frac{1}{2}(\angle BAC + \angle ABC) = \angle IBC + \angle DAC = \angle IBC + \angle CBD = \angle IBD$. Kolmio DIB on siis tasakylkinen, eli $ID = BD$. Huomataan myös, että $\angle BAD = \angle BFD$. Kolmiot DFB ja IAE ovat yhdenmuotoisia suorakulmaisia kolmioita. Siis todellakin $\frac{IE}{IA} = \frac{r}{IA} = \frac{BD}{DF} = \frac{BD}{2R} = \frac{ID}{2R}$ eli $IA \cdot ID = r(2R)$.

391. Jos $n \leq 2$, asia on selvä. Oletetaan, että $n \geq 3$. Koska pisteitä on äärellinen määrä, ne mahtuvat joka tapauksessa johonkin ympyrään. Ellei ympyrän kehällä ole yhtään annetuista pisteistä, ympyrää voidaan pienentää, kunnes ainakin yksi piste A on ympyrällä, mutta kaikki pisteet ovat ympyrässä tai sen kehällä. Jos kehällä ei ole kolmea pistettä, ympyrää voidaan edellen pienentää, kunnes sen kehällä on kolme pistettä (ellei kehällä ole kahta pistettä, jotka ovat halkaisijan päätepisteet; tällöin kaikki pisteet ovat ympyrässä, jonka säde on $\leq \frac{1}{2}$). Poikkeustilannetta lukuun ottamatta kaikki pisteet ovat ympyrässä, jonka kehällä on kolme pistetä A, B ja C, joiden kaikkien etäisyydet toisistaan ovat ≤ 1. Nähdään helposti, että kolmio ABC voidaan olettaa teräväkulmaiseksi (jos ympyrän kehältä löytyisi vain tylppäkulmainen ABC, ympyrää voitaisiin pienentää). Oletetaan, että BC on kolmion ABC pisin sivu. Jos $\angle BAC > 60°$, kolmion ABC ympäri piirretty ympyrä on säteeltään pienempi, kuin tasasivuisen kolmion $A'BC$ ympäri piirretty ympyrä. Mutta tasasivuisen kolmion ympäri piirretyn ympyrän säde on $\frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ kertaa kolmion sivu, ja väite seuraa.

392. Annettu ehto on $a^2 = b^2 + bc$. Kosinilauseen nojalla $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ eli $b = c-2b\cos\alpha$. Myös kosinilauseen perusteella $b^2 = a^2+c^2-2ac\cos\beta$, joten $b+c-2a\cos\beta = 0$. Edellen $b+2b\cos\alpha = -b+2a\cos\beta$ eli $\frac{b}{\cos\beta} = \frac{a}{1+\cos\alpha}$. Toisaalta sinilauseen perusteella $a\sin\beta = b\sin\alpha$, josta seuraa $\frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$ ja edelleen $\sin\beta + \sin\beta\cos\alpha = \sin\alpha\cos\beta$ eli $\sin(\alpha-\beta) = \sin\beta$. Tämän yhtälön ainoa mielekäs ratkaisu on $\alpha - \beta = \beta$ eli $\alpha = 2\beta$.

393. Valitaan eräs käyrän piste F_1. Valitaan sitten toinen käyrän piste F_2 niin, että etäisyys F_1:stä F_2:een käyrää pitkin kuljettuna on $\frac{L}{2}$. Koska jana on lyhyi tie pisteestä toiseen, niin mielivaltainen käyrän piste P toteuttaa nyt yhtälön $F_1P+F_2P \leq \frac{L}{2}$. Piste on siis pisteiden tasossa sijaitsevan sellaisen ellipsikäyrän sisällä, jonka ellipsin polttopisteet ovat F_1 ja F_2 ja isoakselien summa $\leq \frac{L}{2}$. Käyrä sisältyy siis varmasti siihen pyörähdysellipsoidiin, jonka polttopåisteet ovat F_1 ja F_2 ja jonka pisin puoliakseli on $\frac{L}{4}$. Tämä pyörähdysellipsoidi puolestaa sisältyy palloon, jonka keskipiste on janan F_1F_2 keskipiste ja säde $\frac{L}{4}$.

394. Merkitään $f(1) = a$. Osoitetaan, että $f(x) = ax$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Ensinnäkin $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0) = 2f(0)$, joten $f(0) = 0$. Edelleen $0 = f(0) = f(x-x) = f(x) + f(-x)$, joten $f(-x) = -f(x)$. Voidaan olettaa, että $x > 0$. Osoitetaan induktiolla, että $f(n) = an$, kun n on luonnollinen luku. Tämä on totta, kun $n = 1$. Jos $f(n) = an$, niin $f(n+1) = f(n)+f(1) = an+a = (n+1)a$. Samoin näytetään, että $f(nx) = nf(x)$. Tästä seuraa $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}f(1) = \frac{a}{n}$ ja $f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n}as$. Jos x on mielivaltainen reaaliluku, $x = \lim_{k\to\infty} q_k$, missä $q_k \in \mathbb{Q}$. Jatkuvuuden perusteella $f(x) = \lim_{k\to\infty} f(q_k) = \lim_{k\to\infty} q_k a = ax$.

395. Mielivaltaiselle x on $f(x) = f\left(2 \cdot \frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right)^2 \geq 0$. Jos $f(x) = 0$ jollain x, on edellisen perusteella $f(2^{-k}x) = 0$ kaikilla k ja jatkuvuuden perusteella $f(0) = 0$. Tällöin $f(y) = f(y + 0) = f(y)f(0) = 0$ kaikilla y. Voidaan olettaa, että $f(x) > 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Olkoon $g(x) = \ln f(x)$. Silloin $g(x + y) = \ln f(x + y) = \ln(f(x)f(y)) = \ln f(x) + \ln f(y) = g(x) + g(y)$ ja g on jatkuva funktio. Edellisen perusteella $g(x) = xg(1)$, joten $f(x) = e^{g(x)} = f(1)^x$.

396. Lasketaan suoraan:

$$f(x{+}6) = f((x{+}3){+}3) = \frac{f(x+3)}{3f(x+3)-1} = \frac{\dfrac{f(x)}{3f(x)-1}}{3\dfrac{f(x)}{3f(x)-1}-1} = \frac{f(x)}{3f(x)-(3f(x)-1)} = f(x).$$

397. Kun funktionaaliyhtälöön sijoitetaan $y = 1$, saadaan $f(x) = 2f(x) - f(x + 1) + 1$ eli $f(x + 1) = f(x) + 1$. Induktiolla saadaan heti $f(k) = k + 1$ kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla k.

398. Olkoon $f(1) = a$. Silloin $a+1 > 0$ ja $f(a+1) = \dfrac{1}{a}$ ja $f(a+1)f\left(f(a+1) + \dfrac{1}{a}\right) = 1$ eli $f\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{a+1}\right) = a$. Koska f on kasvava, on oltava $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{a+1} = 1$ eli $a^2 = a+1$ ja $a = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Koska on oltava $a = f(1) < f(a{+}1) = \dfrac{1}{a}$, $+$-merkkinen juuri ei kelpaa. Nähdään, että $f(x) = \dfrac{a}{x}$, missä $a = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$, toteuttaa tehtävän ehdon. Siis $f(1) = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. – Jotta saataisiin kaikki tehtävän ehdon toteuttavat funktiot f, valitaan mielivaltainen x ja merkitään $f(x) = y$. Silloin $f\left(y + \dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{y}$, $f\left(\dfrac{1}{y} + \dfrac{x}{xy+1}\right) = y$, josta f:n kasvavuuden perusteella $\dfrac{1}{y} + \dfrac{x}{xy+1} = x$ eli $(xy)^2 = xy{+}1$. Siis $xy = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$; aikaisemman tarkastelun perusteella $+$-merkki on taas torjuttava, joten edellä saatu $f(x) = \dfrac{a}{x}$ on ainoa tehtävän ehdon toteuttava funktio.

399. Ackermanin funktiolle pätee $f(1,\, k) = k + 2$, $f(2,\, k) = 2k + 3$, $f(3,\, k) = 2^{k+3} - 3$ ja

$$f(4,\, k) = 2^{2^{\cdot^{\cdot^{cdot^2}}}},$$

missä potenssitornisssa on kaikkiaan $k{+}3$ kakkosta. Ks. esim. Matematiikan olympiakirja, tehtävä K81.6.

400. Osoitetaan ensin, että

$$f(x^n) = nx^{n-1}f(x) \tag{1}$$

kaikilla luonnollisilla luvuilla $n \ge 1$. Näin on, kun $n = 1$. Jos (1) on tosi, on $f(x^{n+1}) = f(x^{n-1} \cdot x) = nx^n f(x) + x^{n-1}f(x) \cdot x = (n{+}1)x^n f(x)$. Sijoittamalla $x^n = y$ saadaan $f(y) =$

$ny^{n-1/n}f(y^{1/n})$ eli $f(y^{1/n} = \dfrac{1}{n}y^{1/n-1}f(y)$. Tästä saadaan normaaliin tapaan edelleen $f(x^{p/q}) = \frac{p}{q}x^{p/q-1}f(x)$ ja jatkuvuuden perusteella $f(x^r) = rx^{r-1}f(x)$ kaikille positiivisille reaaliluvuille r. Olkoon $a > 1$ mielivaltainen. Koska $x = a^{\ln x/\ln a)}$, $f(x) = f\left(a^{\ln x/\ln a}\right) = \dfrac{\ln x}{\ln a}a^{(\ln x/\ln a)-1}f(a) = \dfrac{x\ln x}{a\ln a}f(a)$. Koska $f(a)$ voidaan valita mielivaltaisesti, ratkaisuja ovat kaikki funktiot $f(x) = bx\ln x$ ja vain ne. – On helppo todeta, että nämä funktiot toteuttavat tehtävän ehdon.

401. Olkoon $g(x) = g(y)$. Silloin $x = g_m(x) = g_m(y) = y$, joten g on injektio. Koska g on jatkuva, g on joko aidosti kasvava tai aidosti vähenevä. Oletetaan, että g on aidosti kasvava. Olkoon $g(x) > x$ jollain $x \in I$. Silloin $g_2(x) > g(x) > x$, $g_3(x) > g_2(x)$, $\ldots x = g_m(x) > g_{m-1}(x)$. Ristiriita. Siis $g(x) \le x$ kaikilla x. Mutta oletus $g(x) < x$ jollain x johtaa samoin ristiriitaan. Siis $g(x) = x$ kaikilla x, joten $g_2(x) = x$ kaikilla x. Jos g on aidosti vähenevä, niin ehdosta $x < y$ seuraa $g(x) > g(y)$ ja $g_2(x) < g_2(y)$. Koska g_2 on aidosti kasvava ja $g_{2m} = g_m \circ g_m$ on identtinen funktio, seuraa edellä todistetusta, että $g_2(x) = x$ kaikilla x.

402. $x = y = 0$ antaa $f(0)^2 - f(0) = f(0)$, joten $f(0) = 0$ tai $f(0) = 2$. Jos $f(0) = 0$, on $f(x) = f(x+0) = 0 \cdot f(x) - f(0\cdot x) = 0$ kaikilla x. Jos $f(0) = 2$, on $f(x) = f(x+0) = 2f(x) - 2$, joten $f(x) = 2$ kaikilla x.

403. Vähän kokeiltuaan huomaa, että $f(x, y) = x$:n ja y:n suurin yhteinen tekijä. (f on yksikäsitteisesti määrätty ja selvästi s.y.t. on eräs mahdollinen f.)

404. Osoitetaan, että $f(2k+1) = 0$ kaikilla k. Kun $k = 0$, saadaan $f(1) = f(1^2 - 0^2) = f(1)f(0) = 0$. Jos $f(2n+1) = 0$, kun $n < k$, saadaan $f(2k+1) = f((k+1)^2 - k^2) = f(k+1)f(k)$. Joko k tai $k+1$ on pariton ja kumpikin on $\le 2(n-1)-1$, joten $f(2k+1) = 0$. Samoin osoitetaan induktiolla, että $f(4n) = 0$ kaikilla n (perusidea $f(4(k+1)) = f((k+2)^2 - k^2) = f(k+2)f(k)$; joko k on pariton tai sitten toinen luvuista $k+2$, k on neljällä jaollinen). Vielä voidaan näyttää, että lukujen $4k+2$ joukossa on enintään yksi, jolle $f(4k+2) \ne 0$. Pätee nimittäin $f(4k+2)f(4n+2) = f((4k+2)^2 - (4n+2)^2) = f(4(4k+4n)) = 0$. Tehtävän ratkaisuja ovat kaikki funktiot f, jotka ovat nollia lukuunottamatta yhtä argumenttia $4k+2$, jossa funktio voi saada mielivaltaisen arvon.

405. Termille a_3 pätee $a_3 = a_2^3 + 1$. Siis $a_2a_4 = (a_2^3+1)^3 + 1 = a_2P(a_2) + 2$, missä P on polynomi. Koska a_2 ja a_4 ovat kokonaislukuja ja $a_2 > 1$, on jaollisuussyistä oltava $a_2 = 2$. Siis $a_3 = 9$. Koska $a_{n+2} = \dfrac{a_{n-1}^3 + 1}{a_n}$ ja a_1 sekä a_2 ovat yksikäsitteiset, jonon kaikki jäsenet ovat yksikäsitteisesti määrättyjä. Osoitetaan vielä, että jonon jäsenet ovat kokonaislukuja eli että jos p on alkuluku ja $p^k|a_n$, niin $p^k|(a_{n+1}^3 + 1)$. Tämä pätee, kun $n = 1$ ja kun $n = 2$. Oletetaan, että a_1, a_2, $\ldots$, a_{n+1} ovat kokonaislukuja; oleteaan, että $p^k|a_n$. Koska $a_na_{n-2} = a_{n-1}^3 + 1$, on $a_{n-1}^3 \equiv -1 \bmod p^k$. Toisaalta $a_{n-1}a_{n+1} = a_n^3 + 1 \equiv 1 \bmod p^k$, joten $a_{n+1}^3a_{n-1}^3 \equiv 1 \bmod p^k$. Tästä seuraa $a_{n+1}^3 \equiv -1 \bmod p^k$ eli $a_{n+1}^3 + 1 \equiv 0 \bmod p^k$. Tästä seuraa, että a_{n+2} on kokonaisluku.

406. Osoitetaan ensin, että f:n on oltava injektio: olkoon $f(n) = f(m)$. Silloin $f(f(n)) + f(n) = f(f(m)) + f(m)$, joten $2n + 6 = 2m + 6$ ja $n = m$. Olkoon $f(0) = p$. Silloin $f(p) = 6 - p \geq 0$, joten $p \leq 6$. Edelleen $f(6 - p) + 6 - p = 2p + 6$, joten $f(6 - p) = 3p$. Siis $f(3p) + 3p = 18 - 2p$, $f(3p) = 18 - 5p \geq 0$. Näin ollen $p \geq \frac{18}{5} < 4$, $p \leq 3$. Edelleen $f(18 - 5p) + 18 - 5p = 2(3p) + 6 = 6p + 6$, $f(18 - 5p) = 11p - 12 \geq 0$. Siis $p \geq 2$. Sama temppu vielä kerran: $f(11p - 12) + 11p - 12 = 2(18 - 5p) + 6 = 42 - 10p$, $f(11p - 12) = 54 - 21p \geq 0$, josta $p \leq 2$. Siis $p = f(0) = 2$. Nyt on helppo osoittaa induktiolla, että $f(2n) = 2n + 2$. Tämä on tosi, kun $n = 0$; jos $f(2n) = 2n + 2$, niin $f(2n + 2) = f(f(2n)) = 2(2n) + 6 - f(2n) = 4n + 6 - 2n - 2 = 2(n + 1) + 2$. Koska f on injektio, $f(2n + 1)$ on pariton kaikilla n. Lasketaan $f(1) = q$. Koska $f(q) + q = 8$, $q \leq 8$. Siis $q \in \{1, 3, 5, 7\}$. Jos $q = 1$, on $1 + 1 = 8$. Jos $q = 5$, on $f(5) = 8 - 5 = 3$, $f(3) + 3 = 16$, $f(3) = 13$, $f(13) + 13 = 6 + 6$, $f(13) = -1$. Ristiriita taas. Jos $q = 7$, $f(7) = 8 - 7 = 1$, $f(1) + 1 = 2 \cdot 7 + 6 = 20$, $f(1) = 19$. Ristiriita. Jos $f(1) = 3$, saadaan induktiolla $f(2n + 1) = 2n + 3$. Ainoa kyseeseen tuleva funktio on siis $f(x) = x + 2$; se myös toteuttaa tehtävän ehdot.

407. Laskemalla jonon ensimmäisiä termejä johdutaan oletukseen $a_n = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}$; hypoteesin voi todistaa induktiolla raa'asti laskemalla.

408. Olkoot luvut $a - 1$, a ja $a + 1$. Lukujen summa on $3a$ ja kuutioiden summa $(a - 1)^3 + a^3 + (a + 1)^3 = a^3 - 3a^2 + 3a - 1 + a^3 + a^3 + 3a^2 + 3a + 1 = 3a^3 + 6a = 3a(a^2 + 2)$.

409. $1! = 1$. $m = 1$, $n = 1$ on ratkaisu. $1! + 2! = 3$. $1! + 2! + 3! = 9$. $m = 3$, $n = 3$ on ratkaisu. $1! + 2! + 3! + 4! = 33$. Kun $n \geq 5$, $n!$:n tekijä on 10, joten $n!$ päättyy nollaan. Siis $1! + 2! + \cdots + n!$ päättyy numeroon 3, kun $n \geq 5$. Mikään neliöluku ei pääty numeroon 3. Muita ratkaisuja kuin jo mainitut ei siis ole.

410. Oletetaan, että tehtävän ehdot täyttävä f on olemassa. Kumpikin ehto osoittaa, että f on injektio. [Jos $f(x) = f(y)$, niin $x = y$.] Koska $f(1 + f(0)) = 1 - 0 = 1 = f(f(1))$, on $1 + f(0) = f(1)$. Koska $f(1 + f(1)) = 0 = f(f(0))$, on $1 + f(1) = f(0)$. Siis $1 = f(1) - f(0) = -1$. f:n olemassaolosta olisi ikäviä seurauksia.

411. Tunnetusti $1 + 3 + \cdots + 2n - 1 = n^2$. [Todistus induktiolla käyttäen hyväksi tietoa $(k + 1)^2 - k^2 = 2k + 1$.] Jokainen peräkkäisten parittomien kokonaislukujen summa on siis kahden neliön erotus ja kääntäen. Koska $m^2 - n^2 = (m + n)(m - n)$ ja $m + n$, $m - n$ ovat joko molemmat parittomia tai molemmat parillisia, niin $m^2 - n^2$ on joko pariton tai 4:llä jaollinen. Jokainen pariton luku on luonnollisesti yhden peräkkäisen parittoman luvun summa. Olkoon $4k$ mielivaltainen 4:llä jaollinen luku. Asetetaan $m = k + 1$, $n = k - 1$. Silloin $m^2 - n^2 = 4k$. $4k$ on siis peräkkäisten parittomien kokonaislukujen summa. Tehtävässä kysyttyjä lukuja ovat siis kaikki parittomat luvut ja parillisista luvuista ne ja vain ne, jotka ovat jaollisia 4:llä.

412. Jos olisi $p+q=0$, olisi $-p^2=1$. Voidaan siis ratkaista r, $r=\dfrac{1-pq}{p+q}$, ja sijoittaa lausekkeeseen. Saadaan

$$(1+p^2)(1+q^2)(1+r^2)=\frac{(1+p^2)(1+q^2)}{(p+q)^2}((p+q)^2+(1-pq)^2).$$

Mutta $(p+q)^2+(1-pq)^2=p^2+q^2+1+p^2q^2=(1+p^2)(1+q^2)$. Kun tämä sijoitetaan edelliseen, saadaan

$$(1+p^2)(1+q^2)(1+r^2)=\left(\frac{(1+p^2)(1+q^2)}{p+q}\right)^2.$$

Koska p ja q ovat rationaalilukuja, myös $\dfrac{(1+p^2)(1+q^2)}{p+q}$ on rationaaliluku.

413. Jos n on jaollinen kolmella, niin pohjamonikulmiot voidaan värittää niin, että kolme väriä seuraavat toisiaan samassa järjestyksessä. Jos molemmat pohjat väritetään samoin, niin jokainen kärki yhdistyy saman pohjan viereisiin toisenvärisiin kärkiin ja vastakkaisen pohjan samassa asemassa olevaan samanväriseen kärkeen. Oletetaan sitten, että väritys on mahdollinen. Oletetaan, että punaisia kärkiä on p kappaletta. Koska jokainen kärki yhdistyy tasan kolmeen muuhun eikä yhdelläkään kärjellä ole kahta samanväristä naapuria, kärkiä, joilla on punainen naapuri, on $3p$. Koska jokaisella kärjellä on punainen naapuri, on $2n=3p$. Siis n on jaollinen 3:lla.

414. Huomataan, että sallittu n on <7. Jos nimittäin lasketaan yhteen puolittain epäyhtälöt $a_1+a_2+a_3>0$, $a_2+a_3+a_4>0$, $\ldots$, $a_5+a_6+a_7>0$, saadaan $(a_1+a_2+\cdots+a_5)+(a_2+a_3+\cdots+a_6)+(a_3+a_4+\cdots+a_7)>0$. Tämä on mahdollista vain, jos ainakin yksi sulkeissa olevista kolmesta yhteenlaskettavasta on positiivinen. Etsitään esimerkki kuuden luvun jonosta, jolla on vaadittu ominaisuus. Etsitään jonoa, joka on muotoa a, b, c, c, b, a. Jos esimerkiksi a, b ja c voidaan valita niin, että

$$\begin{cases} a+b+c=1 \\ b+2c=1 \\ a+2b+2c=-1, \end{cases}$$

niin jonolla on haluttu ominaisuus. Edellisellä yhtälöryhmällä on ratkaisu $a=c=3$, $b=-5$. Jono 3, -5, 3, 3, -5, 3 toteuttaa tehtävän ehdon suurin n on siis 6.

415. Koska kolmion sivu on lyhempi kuin kahden muun sivun summa, niin $c<a+b$, joten $a+b+c<2(a+b)$ eli $p=\dfrac{1}{2}(a+b+c)<a+b$. Samoin nähdään, että $p<b+c$ ja $p<c+a$. Siis

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}<\frac{a}{p}+\frac{b}{p}+\frac{c}{p}=2.$$

Vasemmanpuolisen epäyhtälön voi todistaa näppärästi nojautumalla *suuruusjärjestys-epäyhtälöön*: jos $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$ ja $b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_n$, ja c_1, c_2, ..., c_n ovat luvut b_1, b_2, ..., b_n jossain järjestyksessä, niin $a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \geq a_1c_1 + a_2c_2 + \cdots + a_nc_n$. [Olennainen idea tämän todistamiseksi on summien $a_1c_1 + \cdots + a_kc_k + \cdots + a_jc_j + \cdots + a_nc_n$ ja $a_1c_1 + \cdots + a_kc_j + \cdots + a_jc_k + \cdots + a_nc_n$ vertaaminen: summien erotus on $(a_k - a_j)(c_k - c_j)$; edellinen summa on suurempi, jos $c_k \geq c_j$.] Palataan tehtävään. Voidaan olettaa, että $a \geq b \geq c$. Silloin $a + b \geq a + c \geq b + c$. Suuruusjärjestysepäyhtälön nojalla

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{a}{c+a} + \frac{b}{a+b} + \frac{c}{b+c}$$

ja

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}.$$

Kun epäyhtälöt lasketaan puolittain yhteen, saadaan

$$2\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}\right) \geq 3,$$

eli vasen epäyhtälö.

416. Piirretään säde BD eri puolelle suoraa AB kuin C niin, että $\angle CBD = 100°$ ja $BD = BC = CM$. Koska kolmion BDC on tasakylkinen, on $\angle BDC = \angle BCD = 40°$ ja $\angle ACD = 60°$. AB on janan CD keskinormaali. Tästä seuraa, että $\angle DAB = 30°$. Kolmio ACD on siis tasasivuinen: $AC = CD$. Mutta kolmiot MCB ja CBD ovat yhteneviä (sks). Siis $BM = CD = AC$.

417. Olkoon P Γ_1:n ja Q Γ_2:n keskipiste ja olkoot T ja S Q:n kohtisuorat projektiot suoralla AB ja PO. Oletuksesta seuraa, että $OP = 2$. Olkoon r Γ_2:n säde. Silloin $SO = r$, $PQ = 2 + r$, $PS = 2 - r$ ja $OQ = 4 - r$. Pythagoraan lause sovellettuna kolmioon QPS antaa $(2 + r)^2 = (2 - r)^2 + SQ^2$ eli $SQ^2 = 8r$. Pythagoraan lause sovellettuna kolmioon OQS antaa $(4 - r)^2 = r^2 + 8r$. Tämän yhtälön ainoa ratkaisu on $r = 1$.

418. Olkoon kolmion ABC korkeusjanojen leikkauspiste H. Koska $FM \perp BC$ ja $HD \perp BC$, FM ja HD ovat yhdensuuntaisia. Samalla tavalla nähdään, että MD ja HF ovat yhdensuuntaisia. Nelikulmio $MDHF$ on siis suunnikas, joten $FM = HD$. Samoin nähdään, että $EN \| HD$ ja $EN = HD$. Mutta tämä merkitsee, että $MNEF$ on suunnikas. Siis erityisesti $MN = FE$. Samoin osoitetaan, että $KN = FD$ ja $MK = DE$. Kolmiot KMN ja DEF ovat siis yhtenevät (sss).

419. Sovelletaan toistuvasti kehäkulmalausetta. Olkoot Γ_1:n ja Γ_2:n keskipisteet O_1 ja O_2. Osoitetaan, että $\angle XO_2Y = 180°$. $\angle XO_2Y = \angle XO_2B + \angle BO_2A + \angle AO_2Y$. $\frac{1}{2}\angle XO_2B = \angle BAX = \angle BAM$. Samoin $\frac{1}{2}\angle AO_2Y = \angle ABM$. Nelikulmiosta AO_1BO_2 saadaan $\angle BO_2A = 180° - \angle BO_1A$. Mutta $\frac{1}{2}\angle BO_1A = \angle ABM + \angle BAM$. Kun nämä yhtälöt yhdistetään, saadaan haluttu tulos.

420. Riittää, kun väite todistetaan tapauksessa $n = 3$. (Isompiin n:iin pääsee käsiksi induktiolla.) Piirretään ympyröille C_1, C_2 ja C_3 halkaisijat MM_1, MM_2 ja MM_3. Olkoon N janan M_1M_3 keskipiste. Thaleen lauseen [puoliympyrän sisältämä kehäkulma on suora.] nojalla M_1A_1, M_2A_2 ja M_3A_3 ovat kohtisuorassa suoraa MA_1 vastaan. Samoin M_1B_1, M_2B_2 ja M_3B_3 ovat kohtisuorassa suoraa MB_1 vastaan. Koska A_2 on A_1A_3:n keskipiste ja B_2 on B_1B_3:n keskipiste, A_2M_2 ja B_3M_2 kulkevat pisteen N kautta. Mutta tämä on mahdollista vain, jos $M_2 = N$. Edelleen Thaleen lauseen $M_1X_1 \perp MX_1$, $M_2X_2 \perp MX_1$ ja $M_3X_3 \perp MX_1$. Koska M_2 on janan M_1M_3 keskipiste, on X_2:n oltava X_1X_3:n keskipiste.

421. Trigonometristen funktioiden jaksollisuuden vuoksi riittää, kun katsotaan, mitä arvoja f saa, kun $0 \le x \le 2\pi$. Kaksinkertaisen argumentin kosinin kaavasta seuraa $2\cos^2 \frac{x}{2} = 1 + \cos x$ ja $2\sin^2 \frac{x}{2} = 1 - \cos x$. Kun $0 \le x \le 2\pi$, niin $\sin \frac{x}{2} \ge 0$ ja kun $0 \le x \le \pi$, niin $\cos \frac{x}{2} \ge 0$. Siis kun $0 \le x \le \pi$, niin

$$f(x) = \frac{3 + 2\sin x}{\sqrt{2}\left(\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}\right)} = \frac{3 + 4\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\sqrt{2}\left(\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}\right)} = \frac{1 + 2\left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right)^2}{\sqrt{2}\left(\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}\right)}.$$

Mutta $\sqrt{2}\left(\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$. Kun $0 \le x \le \pi$, $2\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$ saa kaikki välin $[\sqrt{2},\, 2]$ arvot. f saa siis välillä $[0,\, \pi]$ kaikki ne arvot, jotka funktio g,

$$g(t) = \frac{1 + t^2}{t},$$

saa välillä $[\sqrt{2},\, 2]$. Esim. derivaattaa tarkastelemalla on helppo nähdä, että g on kasvava; koska se on jatkuvakin, se saa kaikki välin $[g(\sqrt{2}),\, g(2)] = \left[\frac{3}{2}\sqrt{2},\, \frac{5}{2}\right]$ arvot.

Kun $x \in [\pi,\, 2\pi]$,

$$f(x) = \frac{3 + 4\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\sqrt{2}\left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2}\right)} = \frac{5 - 2\left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2}\right)}{\sqrt{2}\left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2}\right)} = \frac{5 - u^2}{u},$$

missä $u = \sqrt{2}\left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$. $2\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$ saa välillä $[\pi,\, 2\pi]$ kaikki välin $[\sqrt{2},\, 2]$ arvot. f saa siis välillä $[\pi,\, 2\pi]$ kaikki ne arvot, jotka funktio h,

$$h(u) = \frac{5 - u^2}{u},$$

saa välillä $[\sqrt{2},\, 2]$. Esim. derivaattaa tarkastelemalla on helppo nähdä, että h on vähenevä; koska se on jatkuvakin, se saa kaikki välin $[h(2),\, h(\sqrt{2})] = \left[\frac{1}{2},\, \frac{3}{2}\sqrt{2}\right]$ arvot. Kaiken kaikkiaan f:n arvojoukko on siis $\left[\frac{1}{2},\, \frac{5}{2}\right]$.

422. Tehtävässä pyydetään itse asiassa osoittamaan, että yhtälöllä $f(x)+f(7-x)=7$ on ratkaisu. Olkoon $g(x)=f(x)+f(7-x)-7$. Havaitaan, että g on polynomi, jonka aste on ≤ 2. Lisäksi $g(2)<0$ ja $g(3)>0$. Yhtälöllä $g(x)=0$ on siis ainakin yksi ratkaisu.

423. Jos $x \in A$, niin $-x \in A$. Jos $x \in A$ ja $x \geq 0$, niin x on yhtälön $x^2+ax+b=0$ ratkaisu ja jos $x \leq 0$, x on yhtälön $x^2-ax+b=0$ ratkaisu. Joukossa A on siis enintään neljä alkiota. Jos joukossa $A \cap B$ on kolme alkiota, joukossa A on ainakin kolme alkiota. Oletetaan ensin, että alkioita on tasan kolme. Silloin yksi niistä on 0, yksi positiivinen ja yksi negatiivinen. Tällöin on oltava $p=0$ ja muut kaksi ratkaisu ovat $x=a$ ja $x=-a$, $a \neq 0$. Koska alkiot ovat myös yhtälön $\lfloor x\rfloor^2+c\lfloor x\rfloor+d=0$ ratkaisuja, on oltava $d=0$. Yhtälöllä $\lfloor x\rfloor^2+c\lfloor x\rfloor=0$ on oltava ratkaisut $x=0$, $x=a$ ja $x=-a$. Koska luvuista a, $-a$ toinen on positiivinen ja toinen negatiivinen, ei voi olla $\lfloor a\rfloor=\lfloor -a\rfloor$. Siis joko $\lfloor a\rfloor=0$ tai $\lfloor -a\rfloor=0$; kummassakaan tapauksessa a ei ole kokonaisluku.

Oletetaan sitten, että joukossa A on tasan neljä alkiota. Tämä on mahdollista vain, jos yhtälöllä $x^2+ax+b=0$ on kaksi eri suurta positiivista ratkaisua p ja q. Silloin $a=-(p+q)$ ja $A=\{p,\,q,\,-p,\,-q\}$. Joukoista $\{p,\,-p\}$, $\{q,\,-q\}$ ainakin toisen on kuuluttava joukkoon B. Yhtälöllä $x^2+cx+d=0$ on oltava kokonaislukuratkaisut $m<0$ ja $n\geq 0$. Koska yhtälöllä ei voi olla enempiä ratkaisuja, on oltava $B=[m,\,m+1)\cup[n,\,n+1)$. Oletetaan, että $p \in B$, $-p \in B$, eli $\lfloor p\rfloor=n$, $\lfloor -p\rfloor=m$. Jos p on kokonaisluku, $p=n$ ja $-p=m$. Koska luvuista q, $-q$ jompikumpi kuuluu joukkoon B ja $q\neq p$, q ei voi olla kokonaisluku. Koska $a=-(p+q)$, a ei voi olla kokonaisluku. Jos p ei ole kokonaisluku, niin $n=\lfloor p\rfloor$ ja $m=-\lfloor p\rfloor-1$. Jos $q\in B$ ja q ei ole kokonaisluku, niin $\lfloor q\rfloor=\lfloor p\rfloor$, jolloin myös $\lfloor -q\rfloor=\lfloor -p\rfloor-1$ eli $-q\in B$ ja jos $-q\in B$, niin $\lfloor -q\rfloor=\lfloor -p\rfloor-1$, jolloin myös $\lfloor q\rfloor=\lfloor p\rfloor$, eli $q\in B$. Tällöin $A\cap B$:ssä onkin 4 alkiota. Jos q on kokonaisluku, niin $-a=(p+q)$ ei ole kokonaisluku.

424. Koska $10^6-1=(10^3-1)(10^3+1)=(10-1)(10^2+10+1)(10+1)(10^2-10+1)=9\cdot 111\cdot 11\cdot 91=3^3\cdot 37\cdot 11\cdot 7\cdot 13$, suurin alkutekijä on 37.

425. Olkoon $x=\overline{a_na_{n-1}\ldots a_2}$. Silloin $\overline{a_na_{n-1}\ldots a_1}=10x+a_1$. $10x+a_1$ on jaollinen 7:llä jos ja vain jos $10x+a_1-21a_1$ on jaollinen 7:llä. Mutta $10x+a_1-21a_1=10(x-2a_1)$. Koska luvuilla 10 ja 7 ei ole yhteisiä tekijöitä, $10(x-2a_1)$ on jaollinen 7:llä silloin ja vain silloin, kun $x-2a_1$ on jaollinen 7:llä.

426. Kun $n=0$, $6^{2n+1}+5^{n+2}=6+25=31$. Kun $n>1$, niin $(31+5)^n=31k+5^n$, missä k on kokonaisluku. Siis $6^{2n+1}+5^{n+2}=6\cdot 36^n+25\cdot 5^n=6(31k+5^n)+25\cdot 5^n=31\cdot 6k+31\cdot 5^n$. Väite siis pätee.

427. Koska kertolaskun tuloksen kahteen viimeiseen numeroon vaikuttavat vain tekijöiden kaksi viimeistä numeroa, voidaan laskea viimeiset kaksi numeroa 3^2: 9, 3^3: 27, 3^4: 81, 3^5: $43=50-7$. Tästä 3^{10}: $(50-7)^2=100k+49=50m-1$ ja 3^{20}: $(50-1)^2=100n+1$. Siispä jokainen luku 3^{20p} päättyy numeroihin 01. Koska $3^{999}=3^980\cdot 3^{19}$, luvun 3^{999} viimeiset numerot ovat samat kuin luvun $3^{19}=3^4\cdot 4^5\cdot 3^{10}$. Luvun $81\cdot 43\cdot 49$ viimeisiksi numeroiksi saadaan helposti 67. Myös luvun 2^k viimeiset kaksi numeroa palaavat, kun k:ta kasvatetaan 20:llä. Tunnetusti 2^{10} päättyy 24:ään, joten 2^{20} päättyy 76:een ja 2^{22} 04:ään samoin kuin 2^2. Koska $2^{999} = 2^7 \cdot 2^10 \cdot 2^{982}$, 2^{999} päättyy samoihin kahteen numeroon kuin $28 \cdot 24 \cdot 4$ eli numeroihin 88. Vähennyslasku osoittaa, että $3^{999} - 2^{999}$ päättyy numeroihin 79.

428. Koska $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$, riittää, jos löydetään kokonaisluvut x ja y, joille $x + y = a^4$ ja $x - y = a$. Nämä ehdot toteuttavat luvut $x = \dfrac{a^4+a}{2}$ ja $y = \dfrac{a^4-a}{2}$. Jos a on parillinen, a^4 on parillinen, ja x ja y ovat kokonaislukuja. Jos a on pariton, a^4 on pariton, ja $a^4 \pm a$ on parillinen. x ja y ovat kokonaislukuja.

429. Tehtävä on vain näennäisesti geometrinen, varsinaisesti lukuteoreettinen. Tarvitaan tosiaan vain se, että kulmia voi harpin ja viivoittimen avulla siirtää ja niin muodoin kertoa luvulla eli muodostaa kulma, joka on alkuperäisen kulman monikerta. Olkoon $\alpha = \dfrac{1}{n} \cdot 180°$. Jos olisi $k\alpha = 60°$ jollakin kokonaisluvulla k, niin olisi $3k = n$, mikä on tehtävässä kielletty. Näin ollen jollakin kokonaisluvulla k on $k\alpha < 60° < (k+1)\alpha$ eli $\dfrac{3k}{n} < 1 < \dfrac{3k+3}{n}$ eli $3k < n < 3k+3$. Mutta silloin $n = 3k+1$ eli $n - 3k = 1$ tai $n = 3k+2$ eli $3(k+1) - n = 1$. Edellisessä tapauksessa kulma $60° - k\alpha = (n-3k)\dfrac{180°}{3n} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{180°}{n}$, jälkimmäisessä tapauksessa $(k+1)\alpha - 60° = (3(k+1)-n)\dfrac{180°}{3n} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{180°}{n}$.

430. Ratkaisu perustuu tunnettuun trigonometriseen identiteettiin. Johdetaan se tässä harjoituksen vuoksi.

$$\sin\alpha = \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Samoin saadaan

$$\sin\beta = \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\beta-\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}.$$

Kun edelliset yhtälöt lasketaan puolittain yhteen ja otetaan huomioon, että $\sin(-x) = -\sin x$, $\cos(-x) = \cos x$, saadaan

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Koska α ja β ovat kolmion kulmia, niin $0 < \alpha+\beta < 180°$ ja $-180° < \alpha-\beta < 180°$. Näistä ehdoista seuraa $\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2} > 0$ ja $0 < \cos\dfrac{\alpha-\beta}{2} \le 1$. Siis

$$\sin\alpha + \sin\beta \le 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

(Näinpä tuli todisteuksi, että sinikäyrä on ylöspäin kupera välillä $[0, \pi]$.)

431. Tulo on pariton vain, jos sen kaikki tekijät ovat parittomia. Kahden kokonaisluvun erotus on pariton vain, jos luvuista toinen on parillinen ja toinen pariton. Tarkasteltavassa joukossa on 1002 paritonta ja 1001 parillista lukua. Luvut $a_1, a_3, \ldots, a_{2003}$ eivät voi kaikki olla parillisia. Siis ainakin yksi tulon tekijä on muotoa pariton $-$ pariton ja siis parillinen.

432. Koska $0 \le \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 = a + b - 2\sqrt{ab}$, niin $0 \le 2\sqrt{ab} \le a + b$. Samoin $0 \le 2\sqrt{bc} \le b + c$ ja $0 \le 2\sqrt{ca} \le c + a$. Kerrotaan kolme epäyhtälöä puolittain, jolloin saadaan $8abc = 2\sqrt{ab} \cdot 2\sqrt{bc} \cdot 2\sqrt{ca} \le (a + b)(b + c)(c + a)$.

433. Samoin kuin edellisessä tehtävässä nähdään, että $2ab \le a^2 + b^2$, $2bc \le b^2 + c^2$ ja $2ca \le c^2 + a^2$. Kun epäyhtälöt lasketaan puolittain yhteen, saadaan $ab + bc + ca \le a^2 + b^2 + c^2$. Toisaalta $1 = (a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$, joten $ab+bc+ca \le 1-2(ab+bc+ca)$ eli $3(ab + bc + ca) \le 1$, mikä on se, mitä pitikin todistaa.

434. (Piirrä kuva!) Piirretään F:n kautta CB:n suuntainen suora, joka leikkaa AB:n pisteessä I ja G:n kautta AB:n suuntainen suora, joka leikkaa AD:n pisteessä J. Silloin $FIBC$ ja $GJAB$ ovat suorakaiteita, jote $GJ = AB = BC = FI$. Lisäksi $FI \perp GJ$. Koska myös $FE \perp GH$, kulmien $\angle EFI$ ja $\angle HGJ$ vastinkyljet ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Tästä seuraa, että kulmat ovat yhtä suuret. Kolmioissa FEI ja GHJ on nyt kaksi vastinkulmaa ($\angle EIF$ ja $\angle HJG$ ovat suoria kulmia!) ja niiden välinen sivu (FI ja GJ) pareittain yhtä suuria. Kolmiot ovat yhteneviä (ksk), joten myös $EF = GH$.

435. *Kolmion ABC sivut yksinä sivuina piirretään kolmion ulkopuolelle neliöt $ADEB$ ja $BFGC$. Osoita, että EF on kaksi kertaa niin pitkä kuin kolmion ABC keskijana BP.*

Ratkaisu. (Piirrä kuva!) Täydennetään kolmio ABC suunnikkaaksi $ABCH$. Olkoon $\angle ABC = \beta$. Silloin $\angle HAB = 180° - \beta$ ja koska $\angle ABE = \angle FBC = 90°$, $\angle EBF = 360° - 2 \cdot 90° - \beta = 180° - \beta = \angle HAB$. Koska $ADEB$ on neliö, on $BE = AB$. Koska $BFGC$ on neliö ja $ABCH$ on suunnikas, on $BF = BC = AH$. Kolmioissa EFB ja BHA on näin ollen kaksi paria yhtä pitkiä sivuja ja sivujen välissä samat kulmat. Kolmiot ovat yhteneviä (sks), joten $EF = BH$. Mutta suunnikkaan lävistäjät puolittavat toisensa. Siis HB leikkaa AC:n AC:n keskipisteessä P, ja $BH = 2 \cdot BP$. Siis BP on kolmion ABC keskijana ja $EF = 2 \cdot BP$.

436. Huomataan, että $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$. Jos siis $(x - 2)^2 \in A$, niin $x \in a$. Olkoon nyt $x \in a$. Silloin $x^2 \in a$ eli $((x + 2) - 2)^2 \in A$. Siis $x + 2 \in A$. Koska $1 \in A$, niin edellisestä seuraa, että kaikki parittomat positiiviset kokonaisluvut kuuluvat joukkoon A. Siis $2001 \in A$. Mutta $2001 = (\sqrt{2001})^2 = \left((\sqrt{2001} + 2) - 2\right)^2$, joten $\sqrt{2001} + 2 \in A$. Aikaisemmin havaitun mukaan kaikki luvut $\sqrt{2001} + 2k$ kuuluvat joukkoon A. Erityisesti $2000 + \sqrt{2001} \in A$.

437. Olkoon $\angle ABD = \angle DBC = t$. Jos $AB = c$, niin

$$BD = \frac{c}{\cos t}, \quad BC = \frac{c}{\cos(2t)}.$$

Tehtävän kaksi yhtälöä ovat

$$\frac{1}{\cos(2t)} = \frac{1}{\cos t} + 2, \quad \cos t = \cos(2t) + \frac{1}{2}.$$

Kun merkitään $\cos t = x$, niin $\cos(2t) = 2x^2 - 1$. Kun nämä sijoitetaan edellisiin yhtälöihin, ne sievenevät muotoihin

$$4x^3 + 2x^2 - 3x - 1 = 0, \quad 4x^2 - 2x - 1 = 0.$$

Mutta $4x^3 + 2x^2 - 3x - 1 = (x-1)(4x^2 - 2x - 1)$. Koska $t > 0$, $x \neq 1$. Yhtälöt ovat siis yhtäpitävät.

438. Todistetaan väite induktiolla. Kun $n = 1$, se on ilmeinen. Olkoon $n = 2$. Silloin

$$\begin{aligned} |\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2|^2 + |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|^2 &= (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \cdot (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) + (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \cdot (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \\ &= 2\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2 = 2\left(|\mathbf{v}_1|^2 + |\mathbf{v}_2|^2\right) = 4. \end{aligned}$$

Ainakin toinen luvuista $|\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2|^2$ ja $|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|^2$ on enintään 2; ainakin toinen luvuista $|\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2|$ ja $|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|$ on enintään $\sqrt{2}$. Olkoon sitten $n \geq 3$. Induktio-oletuksena oletetaan, että tehtävän epäyhtälö pätee $n-1$:lle vektorille. Olkoot sitten $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\ldots$, $\mathbf{v}_n$ tason vektoreita ja olkoon jokaisen pituus enintään 1. Kuuden vektorin $\pm\mathbf{v}_1$, $\pm\mathbf{v}_2$ ja $\pm\mathbf{v}_3$ välisistä kulmista ainakin yksi on enintään $60°$. Voidaan olettaa, että nämä vektorit ovat $\mathbf{v}_1$ ja $\mathbf{v}_2$. Mutta silloin $|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| \leq 1$. Sovelletaan induktio-oletusta $n-1$:een vektoriin $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, $\ldots$, $\mathbf{v}_n$: on olemassa luvut c_1, c_2, $\ldots$, c_{n-1}, $|c_j| = 1$, siten, että

$$|c_1(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) + c_2\mathbf{v}_3 + \cdots + c_{n-1}\mathbf{v}_n| \leq \sqrt{2}.$$

Mutta tämä todistaa väitteen päteväksi n:n vektorin tapauksessa.

439. Asetetaan

$$x + \frac{1}{y} = a, \quad y + \frac{1}{z} = b, \quad z + \frac{1}{x} = c.$$

Kun ensimmäisestä yhtälöstä ratkaistaan y x:n avulla ja sijoitetaan tulos toiseen yhtälöön, saadaan ratkaistua z x:n avulla. Kur ratkaisu sijoitetaan viimeiseen yhtälöön ja sievennetään, saadaan toisen asteen yhtälö

$$(bc-1)x^2 + (a - b + c - abc)x + ab - 1 = 0.$$

Jos tässä $bc = 1$, niin $b = c = 1$. Silloin $z < 1$, mutta $\dfrac{1}{z} > 1 = b$, mikä on mahdotonta. Ei voi olla $bc = 1$. Samoin on mahdotonta, että olisi $ab = 1$ tai $ca = 1$. x:n määrittävä yhtälö on siis aidosti toista astetta. Sen diskriminantti on $D = (a-b+c-abc)^2 - 4(bc-1)(ab-1) = (abc - a - b - c)^2 - 4$. Jotta x olisi rationaalinen, diskrinantin on oltava neliöluku. Tämä on mahdollista vain, kun $abc - a - b - c = \pm 2$. Koska $abc - a - b - c = a(bc-1) - b - c \geq bc - 1 - b - c = (b-1)(c-1) - 2 \geq -2$, diskriminantti voi olla -2 vain, kun $a = 1$ ja

$b = 1$ tai $c = 1$. Tämä ei ole mahdollista, niin kuin edellä todettiin. Vastaavasti nähdään, että $abc - a - b - c = 2$ on mahdoton, jos $a, b, c \geq 3$. Ainakin yksi luvuista on siis 1 ta 2. Jos $a = 1$, niin $(b-1)(c-1) = 4$, josta $b = c = 3$ tai $\{b, c\} = \{2, 5\}$. Eri tapauksissa saadaan seuraavat ratkaisut: $(a, b, c) = (1, 2, 5) \Rightarrow (x, y, z) = \left(\frac{1}{3}, \frac{3}{2}, 2\right)$; $(a, b, c) = (1, 3, 3) \Rightarrow (x, y, z) = \left(\frac{1}{2}, 2, 1\right)$; $(a, b, c) = (1, 5, 2) \Rightarrow (x, y, z) = \left(\frac{2}{3}, 3, \frac{1}{2}\right)$. Jos $a = 2$, saadaan $(2b-1)(2c-1) = 9$, josta $b = c = 2$ tai $\{b, c\} = \{1, 5\}$. Jos $a = b = c = 2$, niin $x = y = z = 1$. Toinen tapaus palautuu jo käsiteltyihin. Lisää ratkaisuja saa kiertovaihteluilla.

440. Koska $x = y - 1$, $4x^2 + 4y - 3 = 4y^2 - 4y + 1 = (2y-1)^2$ ja $y^2 - 6x - 2y + 10 = y^2 - 8y + 16 = (y-4)^2$. Siis, kun otetaan huomioon $1 < y < 2$, on $\sqrt{4x^2 + 4y - 3} + 2\sqrt{y^2 - 6x - 2y + 10} = |2y - 1| + 2|y - 4| = 2y - 1 + 8 - 2y = 7$.

441. Koska $-3(-1)^3 - 4(-1)^2 - 1 + 2 = 0$, tehtävän epäyhtälön oikea puoli on jaollinen $(n+1)$:llä. Itse asiassa $-3n^3 - 4n^2 + n + 2 = (n+1)(-3n^2 + 2 - n) = (n+1)^2(-3n+2)$. Jos $n = -1$, epäyhtälö on $0 < 0$ ja siis epätosi. Olkoon $n > -1$. Silloin epäyhtälö on yhtäpitävä epäyhtälön $(n-1)x < (n+1)(2-3n)$ kanssa. Jos $n = 0$, epäyhtälö on $-x < 2$, mikä on totta kaikilla positiivisilla x. Jos $n \geq 1$, vasen puoli on ei-negatiivinen ja oikea puoli negatiivinen. Epäyhtälö ei toteudu. Jos $n < -1$, epäyhtälö on yhtäpitävä epäyhtälön $(n-1)x > (n+1)(2-3n)$ ja edelleen epäyhtälön

$$x < \frac{(n+1)(2-3n)}{n-1}.$$

Koska oikea puoli on x:stä riippumaton positiivinen luku, epäyhtälö ei voi toteutua kaikilla positiivisilla luvuilla x. Vain $n = 0$ kelpaa siis ratkaisuksi.

442. Ensimmäinen kysymys: $(2k+1)^3 - (2k-1)^3 = 8k^3 + 12k^2 + 6k + 1 - 8k^3 + 12k^2 - 6k + 1 = 24k^2 + 2 = 16k^2 + 4k^2 + 1 + 4k^2 + 1 = 16k^2 + 4k^2 + 4k + 1 + 4k^2 - 4k + 1 = (4k)^2 + (2k+1)^2 + (2k-1)^2$. Toisen väitteen todistukseen käytetään alkuosaa: $(2n+1)^3 - 1 = ((2n+1)^3 - (2n-1)^3) + ((2n-1)^3 - (2n-3)^3) + \cdots + (5^3 - 3^3) + (3^3 - 1)$. Jokainen n:stä yhteenlaskettavasta voidaan alkuosan perusteella kirjoittaa kolmen neliön summaksi, ja neliöt ovat ykköstä suurempia lukuun ottamatta viimeistä yhteenlaskettavaa $3^3 - 1 = 4^2 + 3^2 + 1^2$. Mutta tämä ylimääräinen ykkönen puuttuu luvusta $(2n+1)^3 - 2$, joten väite on tosi.

443. Epäyhtälöt ovat symmetriset a:n, b:n, c:n ja d:n suhteen. Voidaan olettaa, että a on luvuista pienin. Siis $a \leq b$, $a \leq c$, $a \leq d$. Kun nämä lasketaan yhteen, saadaan $3a \leq b + c + d$. Tämä sopii yhteen tehtävän toisen epäyhtälön kanssa vain, jos $b = a$, $c = a$ ja $d = a$.

444. Kahdesta ensimmäisestä epäyhtälöstä saadaan kertolaskulla

$$1 = (x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) = \frac{3xyz + x^2y + xy^2 + y^2z + yz^2 + z^2x + zx^2}{xyz}$$

eli $2xyz + x^2y + xy^2 + y^2z + yz^2 + z^2x + zx^2 = 0$ eli $(x+y)(y+z)(z+x) = 0$. Jokin tulon tekijä on 0; olkoon se $x+y$. Silloin $z = t$, $x^3 + y^3 = 0$ ja $z^3 = 1001^3$, $z = 1001$, $x + y + z + t = z + t = 2z = 2002$.

445. Merkitään $-a+b+c = x$, $a-b+c = y$ ja $a+b-c = z$. Koska a, b ja c ovat kolmion sivunpituuksia, x, y ja z ovat positiivisia. Lisäksi $a = \frac{1}{2}(y+z)$, $b = \frac{1}{2}(x+z)$ ja $c = \frac{1}{2}(x+y)$. Todistettava epäyhtälö saa muodon

$$\frac{y+z}{2x} + \frac{x+z}{2y} + \frac{x+y}{2z} \geq 3$$

eli

$$\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right) + \left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right) + \left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right) \geq 6.$$

Mutta viimeinen epäyhtälö seuraa siitä, että $0 \leq \left(\sqrt{r} - \frac{1}{\sqrt{r}}\right)^2 = r + \frac{1}{r} - 2$ eli $r + \frac{1}{r} \geq 2$ kaikilla positiivisilla luvuilla r.

446. Konstruktion perustella $CC_1 \| A_1A_2$ ja $A_1A_2 = CC_1$ (C:n etäisyys suorasta AB on kaksi kertaa A_1:n etäisyys suorasta AB ja A_1A_2 on kaksi kertaa A_1:n etäisyys suorasta AB.) Siis $CC_1A_2A_1$ on suunnikas. M on tämän suunnikkaan lävistäjien leikkauspiste ja siis janan A_1C_1 keskipiste. Mutta myös $C_1BA_1B_1$ on suunnikas (kolmion sivujen keskipisteitä yhdistävät janat ovat kolmion sivujen suuntaisia), joten M on janan BB_1 keskipiste. Näin ollen P on kolmion ABC keskijanan BB_1 piste. Samoin nähdään, että P on myös keskijanan AA_1 piste. P on siis keskijanojen leikkauspiste. Kolmion ABC tasakylkisyyden vuoksi molemmat mainitut keskijanat ovat yhtä pitkiä. Koska keskijanojen leikkauspiste jakaa keskijanan suhteessa $2:1$, sekä AP että BP ovat pituudeltaan $\frac{2}{3}$ tästä AA_1:n ja BB_1:n yhteisestä pituudesta.

447. Jos $a = \frac{1}{26}$, yhtälö on kaikilla $x \neq 2$ toteutuva identtinen yhtälö. Muussa tapauskessa, jos $x \neq 2$, $x \neq 52a$, yhtälö on yhtäpitävä yhtälön $|x-2| = |x-52a|$ kanssa. x on siis 2:n ja $52a$:n välissä, yhtä etäällä molemmista, joten yhtälö on yhtäpitävä yhtälön $x-2 = 52a-x$ kanssa. Ratkaisu on $x = 26a+1$. Jos $a = p^2$ ja p on alkuluku, $26a+1$ ei ole 2 eikä $52a$. Jos $p = 3$, $26p^2+1 = 235$ eli yhdistetty luku. Jos $p \neq 3$, $p = 3k\pm1$ ja $p^2 = 9k^2+6k+1 = 3m+1$ ja $26p^2+1 = 3\cdot 26m + 27$. Tämä on kolmella jaollinen ja kolmea suurempi, siis yhdistetty.

448. Merkitään $DE = x$, $DF = y$. Silloin $S = \frac{1}{2}(cx + by)$. Näin ollen vasemmanpuolinen todistettavista epäyhtälöistä on $(cx+by)^2 \le (b^2+c^2)(x^2+y^2)$ eli $2bcxy \le b^2x^2 + c^2y^2$ eli $(bx-cy)^2 \ge 0$. Epäyhtälö on siis tosi. Oikeanpuolisen epäyhtälön todistamiseksi oletetaan, että $h_b \le h_c$. Tällöin on $c \le b$. Kolmion alan kaavan perusteella $h_c = \frac{2S}{c} = \frac{cx+by}{c}$. Todistettava epäyhtälö on siis $x^2 + y^2 \le \frac{(cx+by)^2}{c^2}$ eli $c^2x^2 + c^2y^2 \le c^2x^2 + 2bcxy + b^2y^2$ eli $c^2y^2 \le b^2y^2 + 2bcxy$. Tämä on totta, koska $c \le b$.

449. Kun otetaan huomioon, että kulmat FAP ja PAE ovat 45°, niin kolmioiden AEF, AEP ja APF pinta-aloista saadaan

$$AE \cdot AF = \frac{1}{\sqrt{2}} AP \cdot AE + \frac{1}{\sqrt{2}} AP \cdot AF.$$

Ensimmäinen todistettava epäyhtälö saadaan tästä kertomalla puolittain luvulla $\frac{\sqrt{2}}{AE \cdot AF \cdot AP}$. Harmonisen ja geometrisen keskiarvon välinen epäyhtälö antaa

$$\frac{2}{\frac{1}{AE} + \frac{1}{AF}} \le \sqrt{AE \cdot AF}.$$

Kun tähän yhdistetään jo todistettu yhtälö, saadaan $\sqrt{2}AP \le \sqrt{AE \cdot AF}$. Kun tämä vielä korotetaan toiseen potenssiin, saadaan todistettava epäyhtälö.

450. Olkoon P pisteen S kohtisuora projektio janalla BC. Kolmiot MNS ja NSP ovat suorakulmaisia. Tästä seuraa $MN > SN > SP$, joten

$$\frac{1}{MN^2} < \frac{1}{SP^2}.$$

Koska SP on suorakulmaisen kolmion BCS korkeusjana, on $SP \cdot BC = SB \cdot SC$. Siis

$$\frac{1}{SP^2} = \frac{BC^2}{SB^2 \cdot SC^2} = \frac{SB^2 + SC^2}{SB^2 \cdot SC^2} = \frac{1}{SB^2} + \frac{1}{SC^2}.$$

451. Olkoot P ja Q janojen AA' ja AB keskipisteet. Oletetusta tasojen kohtisuoruudesta seuraa $BP \perp B'Q$. Kulmat PBA ja $QB'B$ ovat yhtä suuret (vastikyljet kohtisuorassa toisiaan vastaan). Kolmioissa BPA ja $QB'B$ on kaksi yhtä suurta kulmaparia, joten kolmiot ovat yhdenmuotoiset. Jos $AA' = x$ ja $AB = y$, niin yhdenmuotoisuudesta seuraa

$$\frac{\frac{1}{2}x}{y} = \frac{\frac{1}{2}y}{x},$$

josta $x = y$. $ABB'A'$ on siis neliö. Tästä seuraa heti, että $\dfrac{C'D}{BB'} = \sqrt{2}$. Suorakulmaisessa kolmiossa $B'BN$ on $B'N < BB'$, joten $n > \sqrt{2}$. Merkitään kuvion alaa ja kappaleen tilavuutta itseisarvomerkein. Koska MM' on kohtisuorassa tasoa $B'BN$ vastaan, $|BB'MN| = \dfrac{1}{3}MM' \cdot |B'BN|$. Kolmiot $B'BN$ ja $B'BC$ ovat yhdenmuotoisia. Siis

$$\frac{|B'BN|}{|B'BC|} = \frac{B'N^2}{BB'^2} = \left(\frac{B'N}{C'D} \cdot \sqrt{2}\right)^2 = \frac{2}{n^2}$$

ja

$$\frac{|B'BN|}{|BCC'B'|} = \frac{1}{n^2}.$$

Koska $MM' = \dfrac{1}{2}AB$, saadaan lopulta

$$\frac{|BB'MN|}{|ABCDA'B'C'D'|} = \frac{\frac{1}{3}MM'|B'BN|}{AB|BCC'B'|} = \frac{1}{6n^2}.$$

452. Koska $p^2 < p^2 + q < p^2 + 2p + 1 = (p+1)^2$, $p^2 + q$ ei ole neliöluku. Siis $\sqrt{p^2 + q}$ on irrationaaliluku ja $a = 2p^2 + q + 2p\sqrt{p^2 + q}$ on myös irrationaaliluku. Tarkastellaan lukua $b = (-p + \sqrt{p^2 + q})^2$. Se on samoin irrationaaliluku ja siis positiivinen. Siis

$$\sqrt{p^2 + q} < \frac{2p^2 + q}{2p} = p + \frac{q}{2p} \le p + \frac{1}{2}.$$

Siis $\sqrt{p^2 + q} - p < \dfrac{1}{2}$ ja $b < \dfrac{1}{4}$. Koska $a + b$ on kokonaisluku, a:n desimaaliosan on oltava suurempi kuin $\dfrac{3}{4} = 0{,}75$.

453. Selvitetään ensin ensimmäinen kysymys. Oletetaan, että p ja q ovat alkulukuja ja $p^2 + 3pq + q^2 = r^2$, r kokonaisluku. Koska $(3k \pm 1)^2 = 9k^2 + 6k + 1$, kolmella jaottoman luvun neliön jakojäännös kolmella jaettaessa on 1. Jos $p \ne 3$, $q \ne 3$, niin $p^2 + 3pq + q^2$:n jakojäännös kolmella jaettaessa on 2, joten se ei voi olla neliöluku. Luvuista ainakin toinen on siis 3; oletetaan, että $q = 3$. On siis oltava $p^2 + 9(p+1) = r^2$ eli

$$p = \frac{-9 \pm \sqrt{81 - 36 + 4r^2}}{2}.$$

Koska p on kokonaisluku, $4r^2 + 45$ on neliö, sanokaamme s^2. On siis $s^2 - (2r)^2 = 45$ eli $(s + 2r)(s - 2r) = 45$. Voidaan olettaa, että r ja s ovat positiivisia. Koska 45:n tekijät ovat 45, 15, 9, 5, 3 ja 1, jokin seuraavista yhtälöryhmistä toteutuu:

$$\begin{cases} s + 2r = 45 \\ s - 2r = 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} s + 2r = 15 \\ s - 2r = 3, \end{cases} \qquad \begin{cases} s + 2r = 9 \\ s - 2r = 5. \end{cases}$$

Ensimmäisen ratkaisussa on $s = 23$, $r = 11$, josta $p = 7$. Muiden ratkaisut $s = 9$ ja $s = 7$ eivät anna positiivista p:tä. Ainoat ratkaisut ovat $\{p, q\} = \{3, 7\}$.

Olkoon sitten $p^2+3pq+q^2=5^k$, $k\geq 1$. Tämän kanssa yhtäpitävää on $(p-q)^2+5pq=5^k$. Selvästi $p-q$:n on oltava jaollinen 5:llä ja $(p-q)^2$:n 5^2:lla. Siis $k\geq 2$. Luvun pq on oltava jaollinen 5:llä. Koska p ja q ovat alkulukuja, toinen niistä on 5. Mutta koska $p-q$ on jaollinen 5:llä ja q on alkuluku, on oltava myös $q=5$ ja $k=3$.

454. Summan, potenssin tai tulon kaksi viimeistä numeroa määräytyvät operandien kahdesta viimeisestä numerosta. $2^{1999}+2^{2000}+2^{2001}=2^{1999}(1+2+4)=7\cdot 2^{1999}=7\cdot 2^9\cdot 2^{10}\cdot 2^{1980}=7\cdot 512\cdot 1024\cdot (2^{20})^{99}$. Nyt $2^{20}=1024^2$, joten 2^{20} päättyy samoihin kahteen numeroon kuin $24^2=576$. Mutta $76^2=(100-24)^2$ päättyy samoihin kahteen numeroon kuin 24^2 eli numeroihin 76. Siis $(2^{20})^{99}$ päättyy numeroihin 76; kysytty luku päättyy samoihin kahteen numeroon kuin $7\cdot 12\cdot 24\cdot 76=153216$. Luku on 8:lla jaollinen jos ja vain jos sen kolmen viimeisen numeron muodostama luku on 8:lla jaollinen. Koska 16 on jaollinen 8:lla, mutta muotoa $(2k+1)\cdot 100$ olevat luvut eivät ole, täytyy kysytyn luvun kolmanneksi viimeisen numeron olla parillinen. [Maple, Mathematica tai vastaava suuria kokonaislukuja käsittelemään pystyvä ohjelma näyttää, että kyseinen kolmanneksi viimeinen numero on itse asiassa 8.]

455. Piirretään jana OO' niin, että $ABO'O$ on suunnikas. O'-keskinen r-säteinen ympyrä $\mathcal{Y}'$ on $\mathcal{Y}$:n kuva siirtokuvauksessa, jonka määrittää jana AB. Jos $\mathcal{Y}$:n ja $\mathcal{Y}'$:n leikkauspisteet ovat Q_1' ja Q_2', niin suunnikkaiden $ABQ_i'Q_i$, $i=1,\,2$, kärkipisteet Q_1 ja Q_2 ovat ympyrällä $\mathcal{Y}$. Vaadittu suorakaide on $Q_1Q_1'Q_2'Q_2$.

456. Tehdään janan DE määrittämä tason siirto; kolmion ABC kuva tässä siirrossa on $A'B'C'$. Oletetaan, että kolmioiden ABC ja $A'B'C'$ piirit leikkaavat toisensa pisteessä P'. Jos DEP' täydennetään suunnikkaaksi $DEP'P$, niin P on kolmion ABC piirin piste ja PP' vaadittu jana. Jos ABC ja $A'B'C'$ eivät leikkaa, tehtävällä ei ole ratkaisua. [”Huonoin” kuitenkin ratkaisuun johtava tilanne on se, jossa DE on kolmion lyhimmän korkeusjanan pituinen ja suuntainen.]

457. Konstruoidaan jana AB, jonka pituus on a ja jonka päätepisteet ovat suorilla ℓ_1 ja ℓ_2. (Jos janan toinen päätepiste on A, suoralla ℓ_1 ,niin B voidaan valita kahdella tavalla.) Konstruoidaan C niin, että ABC on tasasivuinen kolmio. (C voidaan valita kahdella eri tavalla.) Piirretään C:n kautta ℓ_1:n suuntainen suora; leikatkoon se ℓ_3:n pisteessä C'. Tehdään translaatiokuvaus, jonka määrittää CC'. Silloin A:n ja B:n kuvat A' ja B' ovat suorilla ℓ_1 ja ℓ_2, ja $A'B'C'$ on vaadittu kolmio. Eri ratkaisuja on kaikkiaan neljä.

458. Olkoon O_i ω_i:n keskipiste ja ℓ_1 O_1:n kautta kulkeva suoraa ℓ vastaan kohtisuora suora. Tehdään translaatio, joka vie O_2:n suoralle ℓ_1; ω_2' on ω_2:n kuva tässä translaatiossa ja ω_1, ω_2' leikkaavat pisteissä A ja B. janan AB, joka on $\|\ell$ ja ympyröiden ω_1 ja ω_2' alkukuva on ω_2:n AB:n pituinen jänne; suora AB on tehtävässä vaadittu suora.

459. Koska $CQ=CA$ ja $CB=CP$, $60°$:n kierto pisteen C ympäri vie pisteen Q pisteeksi A ja pisteen B pisteeksi P; siis janan QB janaksi AP. Olkoon F AP:n ja BQ:n leikkauspiste. Koska $\angle AFQ=\angle BFP=60°$, F on sekä kolmion CQA että kolmion BPC ympäri piirretyillä ympyröillä. Lisäksi $\angle AFB=120°$, joten F on myös kolmion ARB ympäri piirretyllä ympyrällä. Vastaavasti nähdään, että $60°$:n kierto pisteen B ympäri vie AP:n RC:ksi ja AP ja RC leikkaavat kolmioiden BPC ja ARB ympäri piirrettyjen ympyröiden leikkauspisteessä. Mutta tämän pisteen on jo todettu olevan F.

460. Olkoon P mielivaltainen kolmion ABC piste. Kierretään kolmiota CPB $60°$ pisteen C ympäri; P:n kuva olkoon P' ja B:n kuva B'. Silloin $BB'C$ on tasasivuinen kolmio ja $PP' = CP$, $P'P = BP$. Lisäksi $AP + BP + CP = AP + PP' + P'B \geq AB'$. Jos P on erityisesti sellainen AB':n piste, että $\angle BCP = 30°$, niin P' on myös janalla AB ja $AP+PP'+P'B' = AB'$. Ehto on myös välttämätön. Minimi saavutetaan siis jossain janan AB' pisteessä. Mutta samoin perustein minipiste on jokaisella niistä kolmesta janasta, jotka yhdistävät kolmion kärjen ja vastakkaiselle sivulle piirretyn tasasivuisen kolmion kärjen. Minimipiste on näiden janojen yhteinen piste eli ABC:n Fermat'n piste.

461. Olkoot K, L ja M suunnikkaan $ABCD$ sivuille DA, AB ja BC piirrettyjen neliöiden keskipisteet. Silloin $LA = LB$, $LA \perp LB$, $AK = BM$ ja AK, BM ovat molemmat $45°$ kulmassa neliön sivuihin nähden. Tehdään $90°$ kierto pisteen L ympäri. Tässä kierrossa A kuvautuu B:ksi, AD B:stä lähteväksi neliön sivuksi, ja siis AK BM:ksi. Tämä merkitsee, että LK:n kuva on LM ja $LK \perp LM$. Samoin näytetään, että jokaiset kaksi vierekkäistä neliöiden keskipisteiden yhdysjanaa ovat yhtä pitkät ja kohtisuorassa toisiaan vastaan.

462. Jana AC yhdistää kahta neliön vastakkaisten sivujen kautta kulkevaa suoraa. jos tätä janaa kierretään $90°$ ja siirretään sopivasti, saadaan jana, joka yhdistää neliön kahden muun vastakkaisen sivun kautta kulkevia suoria. Piirretään siis jana $BE = AC$, $BE \perp AC$. Yksi neliön sivuista kuuluu suoraan DE. Muut saadaan nyt helposti.

463. Suoritetaan $180°$ kierto pisteen P ympäri. ω ja ω:n kuva ω' leikkaavat toisensa pisteissä A ja B. AB on vaadittu jänne.

464. Kuvaus, joka yhdistetään vektorin $\vec{v}$ määrittämästä translaatiosta ja $180°$ kierrosta pisteen P ympäri, on sama kuin kierto pisteen sellaisen pisteen Q ympäri, jolle $\overline{QP} = \frac{1}{2}\vec{v}$ (jos A on mielivaltainen piste, A' sen kuva translaatiossa ja A'' A':n kuva peilauksessa P:n yli, niin kolmiossa $AA'A''$ sivun AA'' keskipiste on Q). ŒŒ Olkoot viisikulmion sivujen keskipisteet M_i, $i = 1, 2, 3, 4, 5$; pyritään konstruoimaan viisikulmio $A_1A_2A_3A_4A_5$ niin, että M_1 on A_1A_2:n keskipiste jne. Tällöin A_3 on yhdiste peilauksista M_1:n ja M_2:n yli eli yhdistettynä A_1:n kuva translaatiossa, jonka määrittää vektori $2\overline{M_1M_2}$. Koska A_4 on A_3:n kuva peilauksessa M_3:n yli, A_4 on alussa tehdyn huomautuksen mukaan A_1:n kuva peilauksessa yli Q:n, joka määrittyy niin, että $\overline{QM_3} = \overline{M_1M_2}$. Toisaalta A_4 on myös A_1:n kuva pisteiden M_5 ja M_4 yli tehtyjen peilausten yhdistämiskuvauksessa eli translaatiossa, jonka määrittää vektori $\overline{M_5M_4}$. Tästä seuraa, että A_1A_4 on M_5M_4:n suuntainen ja Q on A_1A_4:n keskipiste ja $A_1Q = QA_4 = M_4M_5$. Q saadaan täydentämällä $M_1M_2M_3$ suunnikkaaksi. Kun A_1 on määritetty, muut viisikulmion kärjet saadaan helposti.

465. Peilataan ω_1 A:n ympäri, ω_1:n kuva ja ω_2 leikkaavat pisteissä A ja B. Suora AB on vaadittu.

466. Peilataan B suoran ℓ yli; kuvapiste olkoon B'. Murtoviivoilla AXB ja AXB' on sama pituus ja AXB' on ainakin yhtä pitkä kuin AB'. Minimitilanteessa X on AB':n ja ℓ:n leikkauspiste; tällöin kulmat ovat tehtävässä kuvaillun kaltaiset.

467. Olkoot X, Y ja Z mielivaltaisia pisteitä sivuilla AB, BC ja CD. Olkoot X' ja X'' pisteen X kuvat suorien AB ja AC yli tehdyissä peilauksissa. Kolmion XYZ piirin pituus on sama kuin murtoviivan $X''YZX'$. Tämä murtoviiva on pidempi tai yhtä pitkä kuin jana $X'X''$. Kolmio $AX'X''$ on tasakylkinen ja sen kärkikulman suuruus on X:stä riippumatta $2 \cdot \angle BAC$. Kolmion kanta eli $X'X''$ on lyhin, kun sen sivu $AX' = AX$ on lyhin. Tämä tapahtuu silloin, kun X on A:sta piirretyn korkeusjanan kantapiste. Vastaavasti nähdään, että XYZ:n piiri on pienin, kun myös Y ja Z ovat korkeusjanan kantapisteitä. Piiriltään pienin kolmio on siis kolmion ABC ortokolmio.

468. Jos ℓ_1 ja ℓ_2 ovat yhdensuuntaiset, jokainen M:n kautta kulkeva ℓ_1:n leikkaava suora kelpaa. Jos ℓ_1 ja ℓ_2 leikkaavat, peilataan M ℓ_1:n ja ℓ_2:n muodostaman kulman puolittajassa. Jos kuvapiste on M', niin suora MM' on vaadittu suora.

469. M on Q:n kuva homotetiakuvauksessa, jonka homotetiakeskus on P ja suurennussuhde $\frac{1}{2}$; M kiertää siis ympyrää ω', jonka keskipiste on ω:n keskipisteen ja P:n yhdistysjanan keskipiste ja säde puolet ω:n säteestä.

470. Valitaan AB:n piste T, BC:n piste X niin, että $TX \perp BC$ ja täydennetään TX neliöksi $TXYZ$ niin, että Y on suoralla BC ja Z kulman ABC aukeamassa. Leikatkoon suora BZ AC:n pisteessä Z'. Kuvataan $TXYZ$ B-keskisellä homotetialla, jonka suurennussuhde on $\frac{BZ'}{BZ}$. Syntyvä neliö $X'Y'Z'T'$ täyttää tehtävän ehdon.

471. Valitaan AB:n jatkeelta piste E niin, että $BE = DC$. Silloin kolmion ACD ala on sama kuin kolmion BEC, joten kolmion AEC ala on S. Kolmio AEC on kolmion ABP kuva A-keskisessä homotetiakuvauksessa, jonka suurennussuhde on $\frac{AB+CD}{AB}$. Siis $\frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}} = \frac{AB}{AB+CD}$. Samoin todistetaan, että $\frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S}} = \frac{CD}{AB+CD}$. Väitös saadaan, kun viimeiset yhtälöt lasketaan puolittain yhteen.

472. Jos KN on kysytty jana, K on kulman kyljellä AB ja $MN = 2 \cdot KM$, niin K on N:n kuva homotetiassa, jonka kerroin on $-\frac{1}{2}$ ja homotetiakeskus M. Tämä kuvaus vie suoran BC BC:n suuntaiselle ja B:n kuvan B' kautta kulkevalle suoralle $B'C'$, joka leikkaa suoran AB kysytyssä pisteessä K.

473. Merkitään taikaneliömatriisin i:nnen rivin ja j:nnen sarakkeen lukua x_{ij}:llä (siis $x = x_{11}$). Taikaneliöominaisuuden perusteella $x_{31} = 19+96-1 = 114$, $x_{32} = 96+114-19 = 191$ ja $x_{23} = 96+114-1 = 209$. Vielä tuntemattomina olevat lävistääjäalkiot toteuttavat esim. ehdot $x_{22}+x_{33} = 1+114 = 115$, $x_{11}+x_{33} = 96+114 = 210$ ja $x_{11}+x_{33} = 96+209 = 305$. Kahdesta ensimmäisestä yhtälöstä seuraa $x_{11} - x_{33} = 210 - 115 = 95$, josta edelleen $2x = 2x_{11} = 305 + 95 = 400$ ja $x = 200$.

474. Pätee $\lfloor \log_2 n \rfloor = 2k$ jos ja vain jos $2^{2k} \le n < 2^{2k+1}$, $1 \le k \le 4$ $(2^{12} > 1000)$. Ehdon toteuttavia lukuja on $2^2 + 2^4 + 2^6 + 2^8 = 4 + 16 + 64 + 256 = 340$.

475. Koska $xy - 3x + 7y - 21 = (x + 7)(y - 3)$ ja $(a + b)^n$:ssä on $n + 1$ termiä (helppo induktiotodistus, jos niin halutaan), niin lausekkeessa $(x+7)^n(y-3)^n$ on $(n+1)^2$ termiä. Pienin n, jolle $(n + 1)^2 \ge 1996$, on 44.

476. Koska $48 = 7^2 - 1$, varjo on neliö, jonka sivu on 7. Tarkastamalla sellaisen särmän, jonka toisen päätepisteen yläpuolella valolähde on, synnyttämää varjoa, saadaan yhdenmuotoisista kolmioista verranto

$$\frac{x}{1} = \frac{x+1}{7}$$

eli $6x = 1$. Siis $x = 0{,}166\ldots$, ja kysytty luku on 166.

477. Kolmannen asteen yhtälön juurien yleisten ominaisuuksien nojalla

$$\begin{cases} a + b + c = -3 \\ ab + ac + bc = 4 \\ abc = 11. \end{cases}$$

Kun kaksi ensimmäistä näistä yhtälöistä kerrotaan keskenään, saadaan $3abc + a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^a + ac^2 = -12$. Kolmannen asteen yhtälön juurien ominaisuuksien perusteella on myös $-t = (a+b)(b+c)(c+a) = 2abc+a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^a+ac^2 = -12-abc = -23$. Kysytty luku on siis 23.

478. Pelejä on kaikkiaan $\binom{5}{2} = 10$ ja niiden mahdollisia tulosjonoja $2^{10} = 1024$. Lasketaan, kuinka monessa jonossa jokin joukkue on voittanut kaikki tai joklin joukkue hävinnyt kaikki. Jonoja, joissa joukkue A on voittanut kaikki neljä otteluaan on $(10-4)^2 = 64$, joten kaikkiaan jonoja, joissa jokin viidestä joukkueesta on voittanut kaikki, on $5 \cdot 64 = 320$ (Ei ole jonoja, joissa sekä A että B olisivat voittaneet kaikki ottelunsa.) Samoin jonoja, joissa jokin joukkue on hävinnyt kaikki ottelunsa, on 320. Jälkimmäisessä luvussa on mukana jonoja, joissa jokin joukkue on voittanut kaikki ottelunsa. Jonoja, joissa A on voittanut kaikki ja B hävinnyt kaikki ottelunsa, on 2^3 (C:n, D:n ja E:n keskinäisten ottelujen tulosten lukumäärä). Koska A ja B voidaan valita (järjestys huomioon ottaen!) $5 \cdot 4 = 20$:llä eri tavalla, kaksi kertaa esiintyvien jonojen määrä on $20 \cdot 8 = 160$. Jonoja, joissa on jonkin joukkueen neljä voittoa tai jonkin joukkueen neljä häviötä, on siis 480, ja jonoja, joilla ei tätä ominaisuutta ole, on $1024 - 480 = 544$ kappaletta. Kysytty todennäköisyys on

$$\frac{m}{n} = \frac{544}{1024} = \frac{17}{32},$$

joten $m + n = 49$.

479. Kääntämismahdollisuuden vuoksi voidaan rajoittua tapauksiin, joissa ainakin toinen keltaisista neliöistä on alueessa, joka muodostuu kolmen ylimmän rivin neljästä vasemmanpuolimmaisesta sarakkeesta. Tapauksia, joissa toinenkin keltainen ruutu on tässä alueessa on $\binom{12}{2} = 66$. Tapauksia, joissa toinen keltainen ruutu on ruudukon keskimmäinen ruutu on 12. Tapauksia, joissa toinen ruutu on alueessa, joka koostuu neljästä alimmasta rivistä ja kolmesta vasemmanpuoleisesta sarakkeesta, on $12^2 = 144$. Tapauksia, joissa toinen keltainen on kolmen alimman rivin ja neljän oikeanpuoleisen sarakkeen muodostamassa lueessa, mutta ei kuitenkaan toisen neliön kanssa symmetrisessä asemassa keskimmäisen ruudun suhteen, on $\binom{12}{2} = 66$. Viimein tapauksia, joissa keltaiset ruudut ovat symmetrisessä asemassa keskimmäisen ruudun suhteen, on 12. Yhteensä erilaisia värityksiä on näin ollen $66 + 12 + 144 + 66 + 12 = 300$.

480. Olkoon opiskelijan ensimmäinen kulkusuunta A ja paluusuunta B. Tapahtumien kulku on seuraava: 1) Suunta A: poistetaan parittomat, jäävät parilliset. 2) Suunta B: poistetaan $\equiv 0 \bmod 4$, jää $\equiv 2$ ja $\equiv 6 \bmod 8$. 3) Suunta A: poistetaan $\equiv 2 \bmod 8$, jää $\equiv 6$ ja $\equiv 14 \bmod 16$. 4) Suunta B: poistetaan $\equiv 14 \bmod 16$, jää $\equiv 6$ ja $\equiv 22 \bmod 32$. 5) Suunta A: poistetaan $\equiv 6 \bmod 32$, jää $\equiv 22$ ja $\equiv 54 \bmod 64$. 6) Suunta B: poistetaan $\equiv 54 \bmod 64$, jää $\equiv 22$ ja $\equiv 86 \bmod 128$. 7) Suunta A: poistetaan $\equiv 22 \bmod 128$, jää $\equiv 86$ ja $\equiv 214 \bmod 256$. 8) Suunta B: poistetaan $\equiv 214 \bmod 256$, jää $\equiv 86$ ja $\equiv 342 \bmod 512$. 9) Suunta a: poistetaan $\equiv 86 \bmod 512$, jää $\equiv 342$ ja $\equiv 856 \bmod 1024$. 10) Suunta b: poistetaan 856, jää 342, joka siis on viimeinen.

481. Koska $\sin 96^\circ = \cos 6^\circ$ ja $\cos 96^\circ + \cos 6^\circ = 2\cos 51^\circ \cos 45^\circ$, $\cos 96^\circ - \cos 6^\circ = -2\sin 51^\circ \sin 45^\circ$, on ratkaistava yhtälö sama kuin $\tan 19x^\circ = -\cot 51^\circ = \tan 141^\circ$. x on pienin positiivinen kokonaisluku, jolle $19x = 141 + 180n$ jollakin kokonaisluvulla n. Eukleideen algoritmi antaa yhtälön $19x - 180n = 1$ erääksi ratkaisuksi $x = 19$, $n = 2$, joten yhtälön $19x - 180n = 141$ eräs ratkaisu on $x = 141 \cdot 19$, $n = 2 \cdot 141$. Jokainen luku $x = 141 \cdot 19 - 180k$ $n = 2 \cdot 141 - 19k$ on myös ratkaisu. Pienin positiivinen x on 159 $(141 \cdot 19 \equiv 159 \bmod 180)$.

482. Särmiön avaruuslävistäjä on jana $(150t, 324t, 375t)$, $0 \le t \le 1$. Origon jälkeen lävistäjä puhkaisee aina uuden yksikkökuution, kun jokin koordinaateista on kokonaisluku (ja $t < 1$). Tällaisia t:n arvoja on $150 + 324 + 375 = 849$ kappaletta. Jos d on lukujen 150 ja 324 suurin yhteinen tekijä (itse asiassa $d = 6$), niin t:n arvoilla 0, $1/d$, $2/d$, $\ldots$, $(d-1)/d$ on edelliseen summaan tullut kirjatuksi kaksi kertaa siirtyminen uuteen kuutioon, kun itse asiassa siirtyminen on tapahtunut pikkukuution särmän läpi. Koska lukujen 150 ja 375 suurin yhteinen tekijä on 75 ja lukujen 324 ja 375 suurin yhteinen tekijä on 3, näitä kahdesti kirjaamisia on kaikkiaan $6 + 75 + 3 = 84$ kappaletta. Olkoon d' kolmen luvun 150, 324 ja 375 suurin yhteinen tekijä ($d' = 3$). lävistäjä kulkee kärjen kautta, kun $t = 0$, $t = 1/d'$, $\ldots$, $t = (d'-1)/d'$. Kärjen kautta kulkeminen on tullut kirjatuksi uuteen kuution siirtymisenä kolmesti alkuperäisessä summassa ja tullut vähennettyä kolmesti seuraavassa summassa. Oikea määrä lävistyksiä saadaan, kun kahden edellisen summan erotukseen lisätään d'. Tehtävän vastaus on siis $849 - 84 + 3 = 768$.

483. Olkoon P mielivaltainen tason piste ja olkoon $M = PA_1A_2\ldots A_{n-1}$ säännöllinen n-kulmio. Olkoon $M_k = PA_{1k}A_{2k}\ldots A_{n-1,k}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, monikulmio, joksi M kuvautuu, kun tasoa kierretään P:n ympäri kulman $k \cdot \dfrac{2\pi}{n}$ verran. Koska jokainen M_k on säännöllinen n-kulmio, on

$$nf(P) + \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} f(A_{ik}) = 0.$$

Mutta jokainen $A_{i0}A_{i1}\ldots A_{i,n\equiv 1}$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, on myös säännöllinen n-kulmio, joten

$$\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} f(A_{ik}) = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} f(A_{ik}) = 0.$$

Siis $nf(P) = 0$ ja $f(P) = 0$. Koska P on mielivaltainen, f on identtisesti 0.

484. Osoitetaan, että suurin tehtävän ehdon täyttävä n on 9. Tarkastellaan lukuja $x_i = 2^{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, 9$. Silloin

$$|\varepsilon_1 x_1 + \varepsilon_2 x_2 + \ldots + \varepsilon_9 x_9| \le 1 + 2 + 4 + \ldots + 2^8 = 2^9 - 1 = 511 < 9^3 = 729.$$

Jos nyt $9^3|\varepsilon_1 + \varepsilon_2 2 + \ldots + \varepsilon_9 2^8$, niin $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 2 + \ldots + \varepsilon_9 2^8 = 0$. Koska summa on parillinen, $\varepsilon_1 = 0$. Siis $9^3|\varepsilon_2 + \varepsilon_3 2 + \ldots + \varepsilon_9 2^7$, josta seuraa kuten edellä $\varepsilon_2 = 0$. Samoin jatkamalla saadaan $\varepsilon_i = 0$, $i = 3, \ldots 9$. Luku 9 toteuttaa tehtävän ehdon. Olkoon sitten $n \ge 10$. Koska $2^n > n^3$. (Induktiotodistus: $2^{10} = 1024 > 10^3$, jos $2^n > n^3$, ja $n \ge 10$, niin $2^{n+1} > 2n^3 > n^3 + n \cdot n^2 > n^3 + 7n^2 > n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = (n+1)^3$) Olkoon $A = \{x_i, x_2, \ldots, x_n\}$ joukko, jossa on n alkiota. Koska A:n epätyhjien osajoukkojen lukumäärä on $2^n - 1 > n^3$, A:lla on ainakin kaksi osajoukkoa, joiden alkioiden summa on sama $\bmod n^3$. Jos näistä osajoukoista poistetaan niiden mahdolliset yhteiset alkiot, saadaan A:lle kaksi yhteisalkiotonta osajoukoa B ja C, joiden alkioiden summa on sama. Siis

$$\sum_{x_i \in B} x_i - \sum_{x_i \in C} x_i \equiv 0 \bmod n^3.$$

Mutta tämä tarkoittaa, että on olemassa luvut $\varepsilon_i \in \{-1, 0, 1\}$, eivät kaikki nollia, siten, että

$$n^3 | \sum_{x \subset \in A} \varepsilon_i x_i.$$

Mikään $n \ge 10$ ei siis toteuta tehtävän ehtoa.

485. Merkitään $\cos n\pi x = \alpha_n$, $\cos n\pi y = \beta_n$. Silloin $2\alpha_n^2 = \alpha_{2n} + 1$, $2\beta_n^2 = \beta_{2n} + 1$ (kaksinkertaisen kulman kosinin kaava) ja

$$(\alpha_n + \beta_n)^2 + (\alpha_n - \beta_n)^2 = 2(\alpha_n^2 + \beta_n^2) = 2 + (\alpha_{2n} + \beta_{2n}).$$

Koska luvuilla $\alpha_n+\beta_n$ (ja siis myös luvuilla $\alpha_{2n}+\beta_{2n}$) on vain äärellisen monta eri arvoa, myös luvuilla $\alpha_n-\beta_n$ on äärellisen monta eri arvoa. Koska

$$\alpha_n = \frac{1}{2}\left((\alpha_n+\beta_n)+(\alpha_n-\beta_n)\right)$$
$$\beta_n = \frac{1}{2}\left((\alpha_n+\beta_n)-(\alpha_n-\beta_n)\right),$$

luvut α_n ja β_n saavat äärellisen monta eri arvoa. Siis $\alpha_n=\alpha_m$ eli $\cos n\pi x=\cos m\pi x$ joillain $m\neq n$. Siis $n\pi x = m\pi x + 2k\pi$ tai $n\pi x = -m\pi x + 2k\pi$ jollain k. Siis

$$x = \frac{2k}{n\pm m}\in\mathbb{Q}.$$

Samoin todistetaan, että $y\in\mathbb{Q}$.

486. Käytetään seuraavia merkintöjä. E, F, G ja H ovat kaarien AB, BC, CD ja DA keskipisteet, A', B', C' ja D' ovat kolmioiden BCD, CDA, DAB ja ABC sisään piirreettyjen ympyröiden keskipisteet, A_B on kolmion BCD sen sivuympyrän, joka sivuaa CD:tä ja säteitä BC ja BD, keskipiste. Vastaavasti määritellään muut 12 pistettä X_Y, missä $X,\, Y\in\{A,\, B,\, C,\, D\}$, $X\neq Y$. Osoitetaan, että joukoiksi K ja L voidaan valita $K=\{A'B',\, C'D',\, A_BB_A,\, C_DD_C\}$ ja $L=\{A'D',\, B'C',\, B_CC_B,\, A_DD_A\}$. Todistus perustuu osin aputuloksiin, joilla on itsenäisestäkin merkitystä. Piirrä kuvat!

Aputulos 1. $EG\perp FH$. **Todistus.** Olkoon J EG:n ja FH:n leikkauspiste. Kehäkulmia GEH ja FHE vastassa olevat kaaret ovat yhteensä tasan puolet kaarista AB, BC, CD ja DA eli koko ympyrästä. Siis $\angle JEH+\angle JHE = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 360^\circ$ ja $\angle EJH = 90^\circ$. $\square$

Aputulos 2. $FD' = FD_A = FB = FC$. **Todistus.** A, D', F ja D_A ovat samalla suoralla. Kolmion BAD' kulman $BD'A$ vieruskulmana $\angle BD'F = \angle BAF + \angle ABD' = \angle BAF + \frac{1}{2}\angle ABC$. Mutta myös $\angle FBD' = \angle FBC + \angle CBD' = \angle FAC + \frac{1}{2}\angle ABC \angle BAF + \frac{1}{2}\angle ABC$. Kolmio FBD' on tasakylkinen, joten $FD' = FB(=FC)$. Kolmio $D'BD_A$ on suorakulmainen (kulma $D'BD_A$ puolet kahdesta kulmasta, joiden summa on oikokulma), joten $\angle FBD_A = 90^\circ - \angle D'BF = 90^\circ - \angle FD'B = \angle FD_AB$. Kolmio FBD_A on tasakylkinen eli $FD_A = FB$. $\square$ Vastaava tulos pätee muille tehtävän kolmioille; erityisesti esim. D', D_B, A ja C ovat yhtä etäällä kaaren CDA keskipisteestä jne.

Aputulos 3. $A'B'C'D'$ on suorakulmio. **Todistus.** Aputulos 2 sovellettuna kolmioon BDC antaa $FA' = FC = FD'$. F on siis janan $A'D'$ keskinormaalilla. Mutta $\angle D'FH = \angle A'FH$, joten kolmiot $D'FH$ ja $A'FH$ ovat yhteneviä (ssk). Siis $D'H = A'H$, joten myös H on $A'D'$:n keskinormaalilla. Samoin nähdään, että HF on myös $B'C'$:n keskinormaali. Siis $A'D'\|C'B'$. Samoin $A'B'\|C'D'$. Koska $FH\perp EG$, $A'D'\perp A'B'$. $\square$

Aputulos 4. $A'D'A_DD_A$ on suorakulmio. **Todistus.** Aputuloksen 2 perusteella nelikulmion $A'D'A_DD_A$ lävistäjät ovat yhtä pitkät ja puolittavat toisensa. $\square$

Aputuloksen 4 perusteella pisteet D_A ja C_B ovat suoralla $A'B'$, pisteet A_D ja B_C suoralla $D'C'$, pisteet A_B ja D_C suoralla $C'B'$ ja pisteet B_A ja C_D suoralla $D'A'$. Lisäksi suorat A_BB_A ja C_DD_C ovat $A'B'$:n ja $C'D'$:n suuntaisia ja suorat B_CC_B ja A_DD_A suorien

$A'D'$ ja $B'C'$ suuntaisia. Väite tulee todistetuksi, kun osoitetaan, että A_BB_A ja B_CC_B leikkaavat pisteessä D_B

Aputulos 5. Janan B_CB_A keskipiste on kaaren CDA keskipiste P. **Todistus.** B_C, D ja B_A ovat kolmion ACD kulman D vieruskulmien yhteisellä puolittajasuoralla. Jos B_CB_D leikkaa kaaren CDA pisteessä P', niin (olettaen, että $P' \in DB_A$) $\angle CDP' = \frac{1}{2}(\angle DAC + \angle ACD)$, joten kaari CP' on puolet kaaresta CDA. Siis $P' = P$. Olkoon P'' B_CB_A:n keskipiste. Koska kolmiot B_CAB_A ja B_CCB_A ovat suorakulmaisia, $P''A = P''C = \frac{1}{2}B_AB_C$. Siis P'' on janan AC keskinormaalilla. Tämä keskinormaali leikkaa kaaren CDA pisteessä P. Koska $P \in B_CB_A$, on oltava $P'' = P$. $\square$

Aputuloksen 5 ja aputuloksen 2 jälkeen tehdyn huomautuksen perusteella B_AB_C ja $D'D_B$ ovat yhtä pitkät ja puolittavat toisensa leikkauspisteessään P. Näin ollen $B_CD'B_AD_B$ on suorakulmio, joten D_B on suorilla B_AA_B ja B_CC_B. Vastaavat tulokset pätevät pisteille B_D, C_A ja A_C, joten todistus on valmis. [Romanian vuoden 1996 olympiavalinnassa neljä kilpailijaa ratkaisi tämän tehtävän.]

487. Olkoot C_1 ja C_2 ympyröiden ζ_1 ja ζ_2 keskipisteet olkoon C_2OC_1D suorakulmio. Olkoon K ζ_1:n ja ζ_2:n sivuamispiste. Tällöin C_1, K ja C_2 ovat samalla suoralla ja $C_1C_2 = R_1 + R_2$, missä R_i on ζ_i:n säde. Siis myös $OD = R_1 + R_2$. Jos R on ζ:n säde, niin $OC_1 = R - R_1$ ja $OC_2 = R - R_2$. KOlmioepäyhtälön nojalla $R_1 + R_2 = C_1C_2 < OC_1 + OC_2 = (R - R_1) + (R - R_2)$, joten $R_1 + R_2 < R$. Piste D on ζ:n sisällä. Leikatkoon OD ζ:n pisteessä H ja leikatkoot C_1D ζ_1:n E:ssä ja C_2D ζ_2:n F:ssä. Silloin $DE = DF = DH = R - (R_1 + R_2)$. Näin ollen D on ζ_3:n keskipiste, $E = S$, $F = T$ ja $H = C$. Siis $\angle SCT = \angle EHF = 45°$.

488. $AOKC$, $BOKD$ ja $ABCD$ ovat jännenelikulmioita. Olkoon L AD:n ja BC:n leikkauspiste. Osoitetaan, että M on suoralla KL ja että $KL \perp OK$. Osoitetaan ensin, että myös $AKLB$ on jännenelikulmio. Kehäkulmalauseen ja kolmioiden OAC ja OBD tasakylkisyyden perusteella $\angle OKB = \angle ODB = \angle OBD$ ja $\angle AKO = \angle ACO = \angle CAO$. Siis $\angle AKB = \angle OBD + \angle OAC = \frac{1}{2}(\angle AOD + \angle COB) = 90° + \frac{1}{2}\angle COD$. Toisaalta $\angle ALB = 180° - (\angle DAO + \angle CBO) = 180° - \frac{1}{2}(180° - \angle COD) = 90° + \frac{1}{2}\angle COD$. $AKLB$ on siis jännenelikulmio. Tämän takia $\angle LKO = \angle LKA - \angle AKO = 180° - \angle LBO - \angle AKO = 180° - \frac{1}{2}(\angle AOC + \angle COB) = 90°$. Siis $OK \perp OL$. Osoitetaan, että $LKDC$ on jännenelikulmio: $\angle DKC = 360° - (\angle DKO + \angle CKO) = \angle DBO + \angle CAO = \frac{1}{2}(\angle AOD + \angle COB) = 90° + \frac{1}{2}\angle COD = \angle ALB = \angle CLD$. Pisteen M potenssi nelikulmioiden $AKLB$ ja $LKCD$ ympäri piirrettyjen ympyröiden $\mathcal{Y}_1$ ja $\mathcal{Y}_2$ suhteen on sama, sillä se on M:n potenssi ympyrän $ABDC$ suhteen. Siis M on $\mathcal{Y}_1$:n ja $\mathcal{Y}_2$:n radikaaliakselilla, joka puolestaan on ympyröiden leikkauspisteiden kautta kulkeva suora KL.

489. Muutaman laskutoimituksen jälkeen huomaa, että $25!! \equiv 625 \bmod 1000$. Induktiolla näytetään, että $(8k + 1)!! \equiv 625$, $(8k + 3)!! \equiv 875$, $(8k + 5)!! \equiv 375$ ja $(8k + 7)!! \equiv$

625 mod 1000. Tämä seuraa siitä, että $8 \cdot 625 = 5000$, $8 \cdot 875 = 7000$ ja $8 \cdot 375 = 3000$ sekä $3 \cdot 625 = 1875$, $5 \cdot 875 = 4375$ ja $7 \cdot 375 = 2625$. Koska $9999 \equiv 7 \bmod 8$, $9999!! \equiv 625 \bmod 1000$.

490. Luvut $2^{2k+3}+2^{2k} = 2^{2k}(8+1) = (3\cdot 2^k)^2$ ja $3^{2k+1}+3^{2k} = 3^{2k}\cdot 4 = (2\cdot 3^k)^2$ kelpaavat todistukseksi.

491. Koska $A_1C = B_1C$ ja $AA_1 = BB_1$, kolmiot BCB_1 ja ACA_1 ovat yhtenevät tai $\angle AA_1C = 180° - \angle BB_1C$. Edellisessä tapauksessa $AC = BC$ ja $A_1C = B_1C$. Mutta koska $BC_1 = BA_1$ ja $AC_1 = AB_1$, on myös $AB = BC$. Jälkimmäisessä tapauksessa voidaan olettaa, että mitkään kolmioparit AA_1C, BB_1C; AA_1B, CC_1B; BB_1A, CC_1A eivät ole yhtenevät. Silloin $\angle AA_1C = \angle CC_1B = \angle BB_1A$. Oletetaan vielä, että tämä kulma on $< 90°$. Tästä seuraa, että pisteisiin A_1, B_1 ja C_1 piirretyt sivujen normaalit leikkaavat kolmioiden AA_1B, BB_1C ja CC_1A yhteisessä osassa. Mutta AA_1, BB_1 ja CC_1 leikkaavat samassa pisteessä (joka on kolmion ABC Gergonnen piste; välitön seuraus Cevan lauseesta.). Kolmioilla ei siten ole yhteistä sisäosaa, joten vaihtoehto johtaisi ristiriitaan.

492. Luvun a numeroiden summa $S(a)$ on kongruentti a:n kanssa modulo 9. Jos olisi $S(a^2) = 2001$, olisi $a^2 \equiv 3 \bmod 9$; neliöjäännökset modulo 9 ovat kuitenkin 1, 4, 0, 7, 7, 0, 4 ,1.

493. Piirretään suora pisteiden (a, e^{-a}) ja (b, e^{-b}) kautta. Koska funktion $x \mapsto e^{-x}$ kuvaaja on alaspäin kupera, suora leikkaa y-akselin pisteen $(0, e^0)$ alapuolella pisteessä $(0, c)$. Nyt

$$\frac{c}{b} = \frac{|e^{-a} - e^{-b}|}{|b-a|},$$

eli

$$|e^{-a} - e^{-b}| < \frac{1}{b}|b-a|.$$

494. Luku on $(n+1)^4 - n^4 = ((n+1)^2 - n^2)((n+1)^2 + n^2) = (2n+1)((n+1)^2 + n^2))$, molemmat tekijät ovat suurempia kuin 1, joten luku on yhdistetty.

495. Oletetaan, että ympyrät eivät ole samassa tasossa. Olkoot A ja B ympyröiden yhteiset pisteet ja P, Q ympyröiden keskipisteet. Jos C on AB:n keskipiste, niin $PC \perp AB$ ja $QC \perp AB$. Piirretään tasossa PCQ PC:tä ja CQ:ta vastaan kohtisuorat suorat pisteiden P ja Q kautta. Leikatkoot nämä pisteessä O. Suorakulmaisten kolmioiden OPX ja OQY avulla on helppo näyttää, että piste O on yhtä etäällä kummankin ympyräviivan joka pisteestä X ja Y. Ympyrät ovat O-keskisen pallon pinnalla.

496. Voidaan olettaa, että leikkauksista ainakin yksi on ympyrä. Piirretään kohtisuora ℓ ympyrän tasoa vastaan ympyrän keskipisteen kautta ja ℓ:ää vastaan kohtisuora taso kappaleen ja ℓ:n leikkaukseen kuuluvan pisteen kautta. Tämäkin leikkaa kappaleen pitkin ympyrää. ℓ:llä on piste O, joka on yhtä etäällä molempien ympyräviivojen pisteistä. Jos nyt asetetaan ℓ:n kautta mielivaltainen taso, niin se leikkaa kappalen pitkin ympyrää, joka aina on samanlaisen puoolisuunnikkaan tai suorakaiteen ympäri piirretty ympyrä. Kaikilla näillä ympyröillä on sama säde ja keskipisteenä piste O. Tästä seuraa, että kappale on pallo.

497.

$$\begin{aligned}
&(1+x+x^2)(1+x+x^2+\ldots+x^{10})-(1+x+x^2+\ldots+x^6)^2\\
&=\frac{1-x^3}{1-x}\cdot\frac{1-x^{11}}{1-x}-\frac{(1-x^7)^2}{(1-x)^2}=\frac{x^{14}-x^{11}-x^3+1-x^{14}+2x^7-1}{(x-1)^2}\\
&=-\frac{x^3(x^8-2x^4+1)}{(x-1)^2}=-\frac{x^3(x^2-1)^2(x^2+1)^2}{(x-1)^2}=-x^3(x+1)^2(x^2+1)^2.
\end{aligned}$$

498. Olkoon $x=n+y$, missä $0\le y<1$. Yhtälö saa muodon $16n^2-24n+16y^2-24y=11$. Koska $-9\le 16y^2-24y\le 0$, n:n on oltava yhtälön $16n^2-24n=11+a$, missä $0\le a\le 9$ kokonaislukuratkaisu. Luvun $11+a$ on oltava jaollinen 8:lla, joten $a=5$. Tällöin $n=2$ ja $y=\frac{1}{4}$.

499. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>2$ ja aritmeettis-harmonisen keskiarvoepäyhtälön nojalla

$$\sum_{k=5}^{12}\frac{1}{k}=17\left(\frac{1}{60}+\frac{1}{66}+\frac{1}{70}+\frac{1}{72}\right)\ge 1.$$

Väite pätee, kun $m=2$. Induktiolla osoitetaan, että jos

$$\sum_{k=n+1}^{3n}\frac{1}{k}>1,$$

niin

$$\sum_{k=n+2}^{3n+3}\frac{1}{k}>1.$$

Tehtävän väite saadaan näiden tulosten avulla todistetuksi induktiolla.

500. Tehdään esim. varsin litteä vinoneliö. Sen sisään voi asettaa suorakaiteen. jonka lävistäjien summa on lähellä vinoneliön piiriä, kun taas vinoneliön lävistäjien summa on lähellä vinoneliön piirin puolikasta.

501. Olkoot pisteet $-1<x_1<x_2<\ldots<x_7<1$. Olkoon $x_i=\sin\phi_i$, $-\frac{\pi}{2}<\phi_i<\frac{\pi}{2}$. Tehtävän lauseke on muotoa $\sin(\phi_i-\phi_j)$. Jos lausekkeet olisivat kaikki vähintään $\frac{1}{t}$, olisi jokainen $\phi_{i+1}-\phi_i$ ainakin $\frac{\pi}{6}$. Koska $\phi_7-\phi_1<\pi$, tämä ei ole mahdollista.

502. Olkoon $a_n = 1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$. Koska $a_n > 1$, kun $n > 1$, riittää, että osoitetaan, että $a_n < 2$ kaikilla n. Todistetaan induktiolla, että $a_n \le 2-\frac{1}{n}$ kaikilla $n > 1$. Väite on tosi, kun $n = 2$. Olkoon $a_n < 2-\frac{1}{n}$. Silloin $a_{n+1} < 2-\frac{1}{n}+\frac{1}{(n+1)^2} < 2-\frac{1}{n}+\frac{1}{n(n+1)} = 2-\frac{1}{n+1}$.

503. Eräs esimerkki on $f(x) = 2^x$. Yleisesti voidaan f:n arvot valita vapaasti välillä $[0, 1)$ ja sitten asettaa $f(x+n) = 2^n f(x)$ kaikilla kokonaisluvuilla n.

504.

$$\frac{1}{x} - 1 = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \ddots \cfrac{1}{2000 + \sqrt{2001}}}}}$$

jne. Siirtymällä toistuvasti käänteislukuun ja siirtämällä kokonaislukutermi oikealta vasemmalle päästään lopulta muotoon

$$\frac{ax+b}{cx+d} = \sqrt{2001},$$

a, b, c ja d kokonaislukuja, mistä toiseen korottamalla saadaan vaaditunlainen yhtälö x:lle.

505. Jos kuusi positiivista kokonaislukua muodostaa aritmeettisen jonon, jonka summa on 21, luvut ovat 1, 2, 3, 4, 5 ja 6. Olkoot ensimmäisen yhtälön juuret a ja b, jälkimmäisen c ja d. Koska $cd = m$ ja luvut ovat eri suuria, $c \ne 1$ ja $d \ne 1$. Voidaan olettaa, että $a = 1$. Silloin $b = n+1$ ja $m = 6$. Edelleen $b+1 = 6$, joten $b = 5$. On oltava $n = 4$.

506. Tasossa ei ole mahdollista. Vastaoletus: tasossa on kokonaislukukoordinaattipisteet $(a,\ b)$ ja $(c,\ d)$ niin, että $(c,\ d)$, $(0,\ 0)$ ja $(a,\ b)$ ovat säännöllisen kuusikulmion vierekkäiset pisteet. Voidaan olettaa, että a:lla, b:llä, c:llä ja d:llä ei ole yhteisiä tekijöitä. Pätee $a^2+b^2 = c^2+d^2$ ja $2(ac+bd) = a^2+b^2$. Kahden neliön summa on 0 modulo 4 vain, jos molemmat yhteenlaskettavat ovat parillisten lukujen neliöitä. Koska kaikki luvut a, b, c, d eivät ole parillisia, ovat kaikki neliöt $\equiv 1 \bmod 4$, joten kaikki luvut ovat parittomia. Tästä seuraa $a^2+b^2 \equiv 2 \bmod 4$. Mutta $ac+bd$ on parillinen, joten a^2+b^2 onkin jaollinen 4:llä. Ristiriita, joten kokonaiskoordinaattikärkistä kuusikulmiota ei ole tasossa. Avaruudessa kyseisiä kuusikulmioita on: esimerkiksi se, jonka kärjet ovat $(1,\ 2,\ 0)$, $(2,\ 1,\ 0)$, $(2,\ 0,\ 1)$, $(1,\ 0,\ 2)$, $(0,\ 1,\ 2)$ ja $(0,\ 2,\ 1)$.

507. Voidaan olettaa, että $x > 0$. Nyt

$$x^6+1 = (x^2+1)(x^4-x^2+1) = \frac{x^2+1}{x}(x^5-x^3+x) \ge 2p,$$

koska $x+\frac{1}{x} \ge 2$.

508. Koska 1993 on alkuluku, k:n tekijöinä voi olla vain ± 1 ja ± 1993. Kun $k = 1$, saadaan helposti ratkaisut $n = 2$ ja $n = 498$. Muilla k:n arvoilla ei saada kokonaislukuratkaisuja.

509. Tehtävää mutkistaa se, että ei ole määritetty, missä kolmion kärjissä ovat suorat kulmat. Merkitään QR:n keskipistettä M:llä, suorien AQ ja BR leikkauspistettä (jos sellainen on) S:llä ja AS:n ja BS:n keskipisteitä C:llä ja D:llä. *Tapaus 1.* Suorat kulmat ovat kärjissä Q ja R. Nyt $PRSQ$ on suorakaide, ja M on samalla SP:n keskipiste. Kun P käy läpi janan AB pisteet, M käy läpi janan CD. *Tapaus 2.* Suorat kulmat molempien kolmioiden kärjissä P. Silloin P, Q ja R ovat samalla AB:tä vastaan kohtisuoralla suoralla, $PQ + PR = AP + PB$ ja $PM = \frac{1}{2}(PQ + PR) = \frac{1}{2}AB$. Kun P käy läpi janan AB, M käy läpi janan, joka on AB:n suuntainen ja pituinen ja siitä etäisyydellä $\frac{1}{2}AB$. *Tapaus 3.* Suorat kulmat pisteissä A ja B. Varsin ilmeisesti M on tapauksessa 2 mainitun janan keskipiste. *Tapaus 4.* Suorat kulmat pisteissä P ja B tai pisteissä A ja P. Nyt $QPRS$ on suunnikas ja M on myös lävistäjän PS keskipiste. Kun P käy läpi AB:n M käy läpi janan CD. *Tapaus 5.* Suorat kulmat pisteissä Q ja B. M on suorakaiteen $QPRT$ keskipiste. Tämä keskipiste sijaitsee myös kulman ABR puolittajalla eli janalla BC. Ääritapaukset ovat $M = C$ ja $M = BC$:n keskipiste. Vastaavasti, jos suorat kulmat ovat pisteissä A ja R, M käy läpi janan, jonka päätepisteet ovat D ja AD:n keskipiste. *Tapaus 6.* Suorat kulmat pisteissä Q ja P. Tapaus on mukavin käsitellä koordinaatistossa. Olkoon $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$ ja $P = (a, 0)$, Silloin $Q = \left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$ ja $R = (a, 1-a)$. M:n koordinaatit ovat Q;n ja R:n koordinaattien keskiarvoja. Siis $M = \left(\frac{3}{4}a, \frac{1}{2} - \frac{1}{4}a\right)$. Kun P käy läpi janan AB, M käy läpi janan, jonka päätepisteet ovat $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ ja $\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$. Vastaavasti jos suorat kulmat ovat pisteissä P ja R, M käy läpi janan, jonka päätepisteet ovat $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ ja $\left(1, \frac{1}{2}\right)$.

510. Olkoon H ABC:n ortokeskus ja H_a, H_b, H_c H:n peilikuvat peilauksissa yli suorien suorien BC, CA ja AB. Tunnetusti (ja kuten valemnnusviikollakin useaan kertaan tuli esille) H_a, H_b ja H_c ovat ABC:n ympärysympyrän Γ pisteitä. Koska (esimerkiksi) E ja F ovat janojen HH_b ja HH_c keskipisteet, $FE \| H_bH_c$. Siis $AP \perp H_bH_c$. Mutta $H_bA = HA = H_cA$, joten AP on H_bH_c:n keskinormaali. Mutta se merkitsee, että Γ:n keskipiste O on suoralla AP. Aivan samoin osoitetaan, että O on suorilla BQ ja CR. Suorat leikkaavat siis pisteessä O.

511. Jos kolmion sivut ovat a, b ja c ja sen ympärysympyrän säde R, niin tunnetusti (sinilauseen seuraus!) kolmion ala on $\frac{abc}{4R}$. Jos Γ:n säteeksi valitaan (niin kuin voidaan tehdä) $R = \frac{1}{2}$, niin kolmion PP_iP_j ala on siis $\frac{1}{2}PP_i \cdot PP_j \cdot P_iP_j$. Kolmion korkeus on a_{ij} ja kanta P_iP_j, joten ala on myös $\frac{1}{2}a_{ij}P_iP_j$. Siis $a_{ij} = PP_i \cdot PP_j$. Saadaan $a_{12}a_{34} = (PP_1 \cdot PP_2)(PP_3 \cdot PP_4) = (PP_1 \cdot PP_3)(PP_2 \cdot PP_4) = a_{13}a_{24}$.